

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

МЫСЛИ О СОВРЕМЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ
И ЕЕ ИЗУЧЕНИИ



Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

МЫСЛИ О СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ И ЕЕ ИЗУЧЕНИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

51

К88

УДК 51

К $\frac{20201-145}{053(02)-77}$ 75-77

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1977

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время в связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике необычайно большое число будущих инженеров, биологов, экономистов, социологов и т. д. нуждается в серьезной математической подготовке, которая давала бы возможность математическими методами исследовать широкий круг новых проблем, применять современную вычислительную технику, использовать теоретические достижения в практике. Для этого по меньшей мере необходимо получение ими правильного общего представления о том, что такое математика и математическая модель, в чем заключается математический подход к изучению явлений реального мира, как его можно применять и что он может дать. Принципиальными моментами проблемы математического образования являются: выбор объема и содержания математических курсов, определение целей обучения, правильное сочетание широты и глубины изложения, строгости и наглядности, т. е. выбор наиболее эффективных и рациональных путей обучения, и все это с учетом ограниченного времени, отводимого на изучение математики.

Эта проблема, как верно отметил автор, необъятна, однако ему в значительной мере удалось выделить здесь основное и первостепенное.

Перед нами книга, написанная известным ученым, талантливым педагогом, на протяжении многих лет возглавляющим кафедру высшей математики Московского физико-технического института. Л. Д. Кудряв-

цев вносит большой вклад в развитие математического образования в нашей стране. Его учебник «Математический анализ» широко известен и принят в качестве основного в ряде высших учебных заведений страны. Система преподавания математики, выработанная в МФТИ, с большим удельным весом самостоятельной работы студентов хорошо зарекомендовала себя и оказалась результативной в таких крупнейших вузах нашей страны, как Московский энергетический институт, Новосибирский электротехнический институт и др. Л. Д. Кудрявцев является заместителем председателя президиума научно-методического совета по математике при Минвузе СССР, а на Всемирной ассамблее математиков в 1974 г. избран членом исполнительного комитета Международной комиссии по математическому образованию.

Основная мысль, которую автор развивает в книге, состоит в том, что нет «чистой» и прикладной математики, что, несмотря на внешнюю разобщенность своих частей, математика едина и ее единство основано на самой сущности математики.

Автор считает, что обучение математике нельзя подменить обучением ряду ее приложений и методов, не разъясняя сущности математических понятий и не учитывая внутреннюю логику самой математики. Так подготовленные специалисты могут оказаться беспомощными при изучении новых конкретных явлений, поскольку будут лишены необходимой математической культуры и не приучены к рассмотрению абстрактных математических моделей.

Отметим конструктивный подход автора к рассматриваемой проблеме: им предложены и проанализированы 10 положений, которые должны быть положены в основу обучения математике.

Широкий круг рассматриваемых в книге вопросов, их актуальность, доброжелательность автора, когда он делится своим богатым педагогическим опытом, множество поучительных примеров — все это адресует ее широкому кругу читателей и, безусловно, вызовет интерес не только тех, кто учит математике, но и тех, кто ее изучает или соприкасается с ней в своей деятельности.

П. С. Александров

«То, что имеет основанием истину, следует напоминать, не боясь показаться надоедливым».

Н. И. Пирогов

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая книга посвящена в основном роли математики в жизни современного общества и ее изучению лицами, будущая специальность которых не является математикой, но которые в своей деятельности будут широко пользоваться математическими методами. Ее основой являются многочисленные дискуссии, которые приходилось вести автору в продолжение последних тридцати лет, в течение которых он занимался обучением математике студентов физических специальностей. Непосредственным поводом для написания книги явились лекция «Современное математическое образование инженера», прочитанная автором 18 декабря 1975 г. в центральной лектории Всесоюзного общества «Знание», и доклад «О математическом образовании в высших технических учебных заведениях», сделанный 20 августа 1976 г. на Третьем Международном конгрессе по математическому образованию в Карлсруе, ФРГ.

Большую помощь автору при окончательной подготовке рукописи к печати оказала Т. С. Пиголкина, внимательно прочитавшая весь текст и сделавшая много полезных замечаний, за что автор выражает ей свою искреннюю и глубокую благодарность.

В первой главе рассматриваются некоторые общие вопросы педагогики, особенно важные при обучении математике, специфические черты самой математики и ее применений. Во второй главе формулируются и обсуждаются десять основных принципов, которые можно положить в основу обучения математике.

При чтении этой книги необходимо иметь в виду, что всякий педагогический процесс является весьма сложным и многогранным явлением, включающим

в себя, в частности, очень важный вопрос воспитания личности, ибо для того, чтобы быть полноценным специалистом, недостаточно иметь хорошую квалификацию в своей области. Рано или поздно, на том или ином уровне каждому приходится сталкиваться с задачами, которые, быть может, и имеют специальный характер, но для принятия решения по которым оказывается недостаточно расчета, основанного на знании, а приходится принимать во внимание другие факторы, руководствоваться чувством долга, нравственными принципами, моральными нормами, эмоциями. Уважение к этим общественным ценностям не приходит само собой — оно вырабатывается, оно воспитывается.

Каждому из нас приходится жить и работать в человеческом обществе, и надо это уметь делать так, чтобы быть полезным обществу, приятным самому себе и окружающим, чтобы общение с людьми помогало работе. Надо уметь не только следовать за обществом, но и уметь влиять, воздействовать на него. Надо не только знать о тех или иных положительных моральных категориях, но и поступать согласно им в своей повседневной жизни.

Как всего этого достичь? Как все это воспитать?

Когда говорят о преподавании какого-либо предмета, то нередко приходится слышать, что для успеха дела нужны два качества: хорошее знание предмета и (добавляют некоторые) хорошее знание языка, на котором ведется преподавание. Безусловно, эти качества необходимы преподавателю, но они, как говорят математики, недостаточны для того, чтобы надежно гарантировать успешное обучение. Преподаватель, обладающий указанными качествами, при всей своей увлеченности предметом далеко не всегда сумеет научить своих учеников тому, чему он хочет, и, тем более, далеко не всегда сумеет воспитать у студента нужные качества научного работника, исследователя, конструктора, инженера, ученого-организатора, педагога, врача и т. п.

Их невозможно воспитать без воспитания высоких общечеловеческих моральных качеств: любви и уважения к людям, гуманного к ним отношения, доброты, справедливости, честности, принципиальности, самокритичности, мужества, настойчивости и скромности,

добросовестного отношения к своим обязанностям, органической потребности к труду, без того, чтобы эти черты стали обычной нормой поведения. Все это хорошо известно с античных времен. Еще Сократ в диалоге Платона «Менексен» (247а) говорит: «И всякое знание, отделенное от справедливости и другой добродетели, представляется плутовством, а не мудростью».

Процесс воспитания, как и процесс образования в целом, имеет два полюса: воспитателей-преподавателей и воспитуемых-обучающихся. Успех этого процесса прежде всего зависит от преподавателей, к которым поэтому должны предъявляться высокие требования. Только тот имеет право воспитывать и только тот будет это делать успешно, кто чувствует ответственность за свою работу, интересуется ею, любит ее, испытывает чувство волнения за ее исход, убежден в правильности тех принципов, которыми он руководствуется, кто тактично относится к людям, умеет терпеливо выслушивать чужое мнение и ненавязчиво отстаивать собственную точку зрения.

Успех воспитательной деятельности немыслим без того, чтобы преподаватели являлись носителями всех тех качеств, которые они стремятся воспитать у студентов, чтобы отношения между преподавателями были такими, какими они хотят их видеть между студентами, чтобы они разговаривали друг с другом так, как бы они хотели, чтобы разговаривали между собой студенты, чтобы они были со студентами так же вежливы, как они хотели бы, чтобы с ними были вежливы студенты.

Только тот преподаватель сможет добиться успеха в воспитании студента, которого студенты любят и уважают за его увлеченность своим делом и добросовестное отношение к своей работе, к своим обязанностям, за его доброту и человечность, принципиальность и объективность, нетерпимость к несправедливости, короче, который пользуется у них авторитетом и как специалист своего дела, и как просто человек.

Только при наличии контакта между студентами и преподавателями, при наличии между ними атмосферы доверия, взаимоуважения и взаимопонимания

можно достичь настоящих успехов в воспитании студентов.

Само собой разумеется, что малейший оттенок фальши или ханжества в отношении преподавателей к студентам совершенно не допустим. Доброту, основанную на внимании к человеку, на заботе о нем, на доброжелательности, на альтруизме, т. е. Доброту с большой буквы, если так можно сказать, нельзя заменить «внешней добротой», присущей некоторым людям, равнодушным, безразличным к другим, эгоистичным, для которых слыть добряками спокойнее и удобнее, поскольку это не требует активных действий.

Анализ воспитательного аспекта процесса образования не входит в задачу настоящей книги, и поэтому мы ограничимся по этому вопросу лишь сделанными замечаниями.

ГЛАВА I

ОБ ОБЩИХ ПРИНЦИПАХ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ

1. О СПЕЦИФИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ

Трудности при обучении любому предмету возникают уже при отборе материала, которому собираются учить, и, быть может, еще больше при установлении принципов, которыми следует руководствоваться при обучении. Эти трудности усугубляются тем, что обычно каждый педагог, каждый специалист в своей области искренне убежден, что он хорошо знает, что и как надо преподавать по его специальности, и обычно весьма нетерпимо относится к другим мнениям по этим вопросам. Мало что подвергается такой постоянной критике, как существующая система образования. Здесь каждый чувствует себя компетентным, многие любят выступать с поучениями и стараются навязать свою точку зрения.

Это обстоятельство было подмечено еще Н. В. Гоголем. В «Ревизоре» смотритель училищ Лука Лукич Хлопов говорит: «Не приведи бог служить по ученой части, всего боишься. Всякий мешается, всякому хочется показать, что он тоже умный человек» *).

При обучении математике дело усложняется благодаря широкому ее использованию в разнообразных областях науки и техники: нередко специалисты в этих областях совершенно искренне и бесповоротно убеждены, что они лучше других и, в частности, лучше самих математиков знают, в чем смысл математики, как и чему надо учить в ней. При этом каждый, как правило, исходит из своего объема математических знаний, считая, что надо знать именно то, что знает он, причем понимать это так, как понимает он.

*) Н. В. Гоголь, Собр. соч., в пяти томах, том 9. Изд-во АН СССР, М., 1959.

Странным образом забывается, что обучение людей, как и всякая другая человеческая деятельность, требует своих профессионалов. Сложность постановки образования состоит, в частности, в том, что, во-первых, для того чтобы знать чему учить, надо прежде всего быть достаточно широко образованным человеком по своей специальности, т. е. быть хорошим профессионалом в какой-то области человеческого знания или деятельности. Профессионализм же в преподавании возможен лишь как дополнение к профессионализму по специальности. Во-вторых, процесс образования существенно отличается от других видов человеческой деятельности тем, что каким бы образом он ни осуществлялся, люди все равно растут и обучаются, более того, они растут и чему-то научаются, если даже и вовсе не заботиться об их образовании и воспитании, что может привести (но, конечно, вовсе не обязательно) к плохим результатам как для самого индивидуума, так и для общества. Существенно то, что подобных плохих результатов удалось бы избежать во многих случаях, если своевременно правильно поставить образование и воспитание.

Процессы образования и воспитания людей можно уподобить росту культурных растений, ибо эти процессы, с одной стороны, могут происходить без активного вмешательства человека извне, а с другой стороны, подобное вмешательство существенно влияет на результат. Конечно, в жизни людей происходит много процессов другого рода, которые не могут происходить сами собой, без «вмешательства извне» ни в какой степени. Например, дом не построят, если не будет людей; которые займутся его строительством. Растение же вырастет из семени, брошенного в землю и попавшего в благоприятные условия, даже если никто не будет за ним ухаживать. Однако каждый хорошо знает, что мало только посеять семена — для того чтобы получить желанный урожай, надо приложить определенные усилия.

Другой наглядный пример подобного рода дает прекрасный сад, постоянно находящийся в руках хорошего профессионала-садовника, по сравнению с садом, в котором те же цветы растут без всякого ухода. Впрочем, конечно, не следует забывать, что и среди

бурьяна, лопухов и репейников может расцвести прекрасная дикая роза.

Пока мы только ограничимся констатацией всех этих трудностей, а их анализом займемся несколько позднее на конкретном материале.

Прежде чем рассматривать вопрос о содержании и методах обучения, следует решить общую и вместе с тем весьма принципиальную задачу: на какие стороны психологии обучения следует обращать главное внимание и какими основными принципами следует при этом руководствоваться, чтобы учебный процесс был наиболее успешным?

Мне представляется, что такими принципами являются следующие: внушение учащемуся уверенности в его собственных силах и помощи ему, когда это для него необходимо. Следует обратить внимание на то, что здесь нет ни слова ни о порицании, ни тем более о наказании учащихся.

Убедительным и ярким примером пользы обучения, основанного на сформулированном положении, является многолетняя педагогическая деятельность учителя средней школы г. Донецка В. Ф. Шаталова, достигшего, как это хорошо известно, больших, ни с чем не сравнимых успехов в обучении своих учеников. Я думаю, что эти успехи в значительной степени были обусловлены тем, что В. Ф. Шаталов систематически применял указанные принципы в своей работе.

К сожалению, очень мало преподавателей вузов руководствуются в своей работе этими замечательными принципами. В результате часть студентов в процессе обучения в высшем учебном заведении постепенно теряет веру в свои силы и способность освоить то, что от них требуется.

Мало кто из абитуриентов, поступающих в институт, думает, что ему будет легко в нем учиться, но, конечно, почти каждый поступает с надеждой, что он сумеет справиться с трудностями, которые его ожидают. А трудности для многих школьников большие. Эти трудности связаны с большой плотностью информации, которую они получают с первых дней обучения в институтах, с нехваткой времени, чтобы с ней свыкнуться и тем более овладеть, с высокой требовательностью, которая к ним предъявляется, с необхо-

димостью уметь правильно распределять свое время с неумением напряженно работать, вовремя и правильно отдыхать, усваивать материал на нужном уровне (который большинство первокурсников представляет себе весьма туманно). В такой ситуации нетрудно оступиться, ошибиться, не справиться с чем-либо, не суметь сделать что-то часто просто потому, что неизвестно, как это делать, как к этому подступиться. Это совершенно естественно.

Не надо забывать, что первокурсники еще дети, хотя часто они и выше нас ростом. Наблюдаемая акселерация развития нового поколения, о которой так много говорят в настоящее время, больше связана с физическим развитием, чем с духовным. Ведь способность и скорость усвоения нового материала за последние десятилетия, по существу, не изменились.

Если студент начинает не успевать, то его обычно порицают, бранят, отчего он часто теряет остатки веры в собственные силы. Преподаватель же, видя, что студент не справляется с требуемой работой, часто приходит к убеждению, что такому студенту нецелесообразно продолжать обучение в институте, чем и обуславливается все его дальнейшее отношение к этому студенту, которое в лучшем случае можно выразить словами «махнул на него рукой». По-настоящему, преподаватель с этого момента не имеет уже морального права продолжать обучение этого студента, ибо научить, как правило, можно только тогда, когда веришь, что можешь это сделать.

Гораздо более эффективным в большинстве подобных случаев являются не слова порицания, а ободрения. Очень важно, когда студенту трудно, отнестись к нему внимательно, найти пусть самый небольшой успех в его работе и похвалить его за это. Когда студент не выполнил работу, надо исходить не из того, что он лентяй и неспособный, а из того, что он хотел, но не смог сделать нужную работу, так как ему не хватило опыта, умения, а может быть, и времени (в результате того, что он просто не сумел, а, может быть, по каким-либо причинам и не имел возможности распорядиться им нужным образом), и постараться заставить его поверить, что приобрести необходимое умение вполне в его силах.

Итак, мне представляется, что хотя наиболее распространёнными методами воспитания студентов (и детей тоже) являются порицание, отчитывание их за те или иные их прегрешения и наказание за них, было бы гораздо целесообразнее, чтобы эти методы воспитания применялись крайне редко, лишь как исключение.

Преподаватель, как и всякий воспитатель, должен стремиться не наказывать студента за тот или иной проступок, а уделить основные силы и время предупреждению таких проступков и устранению причин, их порождающих, воспитанию в студенте активности, деятельности в нужном направлении. Для этого поощрение является одним из лучших методов. Следует значительно чаще, чем это делается, хвалить (конечно, заслуженно) учащихся и уж ни в коем случае не забывать об этом, когда к тому есть явные причины. Если учащийся нуждается в ободрении, то следует не посчитать за труд найти причину, чтобы сказать ему нужные слова. Проявляя доброту, великодушие, внимание к учащемуся, мы тем самым воспитываем в нём те же качества. Неконтролируемое доверие, оказываемое преподавателем, обычно является весьма успешным методом обучения и стимулирует развитие интересов у учащихся.

Все это, конечно, ни в коей мере не исключает разумную строгость и требовательность в процессе обучения. В частности, особенно важна справедливость и объективность (при доброжелательном отношении) при оценке знаний студентов на экзаменах. Трудно переоценить вред, наносимый подготовке будущих специалистов искусственным завышением успеваемости студентов посредством проведения в жизнь принципа «по возможности не ставить неудовлетворительных оценок».

Безусловно, очень полезным является и регулярный контроль над работой учащихся. Правильно поставленный, он помогает им организовать систематические занятия, выявить в изучаемой дисциплине главное и основное, распределить нужным образом время занятий, а преподавателю оказать учащемуся в нужный момент необходимую помощь — все это является надёжной гарантией успеха обучения.

Принцип регулярного контроля нисколько не противоречит принципу бесконтрольного доверия учащемуся: ни тот, ни другой не следует понимать в абсолютном смысле. Умение совмещать эти принципы в процессе обучения с пользой для учащихся зависит, конечно, от опыта и такта преподавателя.

В связи со всем сказанным возникает естественный вопрос: на основании каких данных можно делать заключение об основных принципах преподавания? Имеются два пути: путь дедукции, умозаключений из общих соображений, и путь педагогического эксперимента, путь накопления опыта. Обычно используются одновременно и тот и другой.

Следует особенно подчеркнуть ответственность тех, кто ставит педагогический эксперимент, подчеркнуть их ответственность за выводы, которые делаются на основании этого эксперимента, и за рекомендации, которые часто даются для повсеместного их претворения в жизнь. Дело в том, что педагогический эксперимент существенно отличается от экспериментов, например, в физике, химии, биологии и т. п. Именно, педагогический эксперимент нельзя повторить в тех же условиях, в которых он был проведен; его результат очень зависит как от индивидуальности обучаемых, так и от индивидуальности обучающихся. Одна и та же методика, успешно примененная в одном случае, может оказаться совершенно непригодной в другом, например, в руках менее искусного педагога или при другом составе учащихся. В педагогическом эксперименте очень легко увидеть то, что хочется, а не то, что имеется на самом деле, в частности, и потому, что отсутствует четкая мера для измерения результата эксперимента. Обо всем этом нельзя забывать.

Большое значение имеет принципиальная оценка итога обучения: если обучение чему-то, проведенное, скажем, заведомо добросовестными и достаточно хорошо эрудированными преподавателями, закончилось неудачей, кто виноват в этом? Обычно в этом случае педагоги, слагая с себя ответственность, говорят, что виноваты учащиеся — они не выучили того, что должны были выучить. Если же возникает вопрос о том, могли ли они на самом деле выучить то, что от них

требовалось, то на него следует ответ: если не могли, то им незачем учиться в данном месте. Приверженцами такой точки зрения большей частью являются люди, занимающиеся преподаванием, но не желающие обсуждать вообще вопросы методики преподавания, считая это пустой тратой времени. Впрочем, ее нередко разделяют и педагоги, относящиеся с достаточным уважением к методике преподавания, но, конечно, и те и другие абсолютно убеждены в том, что они знают, как надо преподавать, и не допускают тени сомнения в своих, пусть даже интуитивных, принципах преподавания.

Мы же будем исходить из положения, что виновником неудачи обучения всегда является педагог, а не учащийся, что обязанностью педагога является не только учить, но и научить и что последнее всегда возможно. Основой этого положения является убеждение в том, что каждый нормальный человек может овладеть любым родом умственной деятельности, в том числе и правильным использованием математических методов, на таком уровне, что он будет нужным, полезным и надежным специалистом своего дела.

Подобная точка зрения зафиксирована в рекомендациях XIX Международной конференции по народному образованию, созданной ЮНЕСКО и БИЕ *) в Женеве в 1956 году: «...психология установила, что практически каждое человеческое существо способно к определенной степени математической деятельности и, в особенности, что нет никаких оснований утверждать, что девочки менее способны к математике, чем мальчики...», «...математическое образование есть благо, на которое имеет право каждое человеческое существо, каковы бы ни были его национальность, пол, положение и деятельность...» **).

При такой постановке вопроса существенно возрастает ответственность преподавателя за выполняемую им работу, ответственность, о которой, к

*) ЮНЕСКО — Организация Объединенных Наций по просвещению, науке и культуре, БИЕ — Международное бюро по просвещению.

**) Математическое просвещение, вып. I, Гостехиздат, М., 1957, стр. 15—22.

сожалению, многие преподаватели имеют весьма отдаленное представление.

Противники высказанной точки зрения нередко возражают, что мало наличия у учащегося потенциальной способности к обучению, надо, чтобы у него было желание учиться, что бесполезно учить того, кто не хочет учиться. Это мнение естественным образом возникает в силу того, что обучение учащихся, которые учатся с интересом, часто протекает легко, требует сравнительно небольшой затраты труда и оказывается весьма эффективным, в то время как обучение учащихся средней или высшей школы, не проявляющих интереса к изучаемому предмету, требует весьма значительных усилий, и не только часто не приносит чувства удовлетворения педагогу, а наоборот, доставляет неприятности, в том числе и служебного характера.

В результате возникает резонный вопрос, а есть ли вообще смысл учить человека, например, математике, если он не проявляет к ней интереса, не имеет к ней склонности? Не лучше ли его научить, например, хорошо работать на токарном станке? Этот вопрос связан, конечно, прежде всего с правильным выбором профессии. Проблема выбора профессии очень сложна, и мы не будем ее анализировать, так как это увело бы нас слишком далеко от нашей основной темы.

Ошибки при выборе профессии, безусловно, случаются, поэтому бывают и ошибки у абитуриента при выборе института, в который он поступил учиться. Однако это исключение. Обычно юноши и девушки выбирают институт в соответствии со своими личными склонностями и интересами и пребывают в начале обучения в уверенности, что они сумеют овладеть выбранной ими профессией.

Случается, правда, что поступивший в тот или иной институт плохо представляет себе реальные трудности обучения в этом институте, в частности трудности, связанные с изучением смежных дисциплин, например математики, необходимых для успешного освоения основной специальности. Столкнувшись с такими трудностями, он начинает плохо успевать, в связи с чем у него начинает уменьшаться интерес к изучаемым предметам. Вот в этот-то момент

и раздаются обычно голоса: «Зачем учить тех, кто не хочет учиться?» При этом забывают о том, что студент приходит в институт не с намерением бить баклуши, а учиться, что для освоения предметов, изучаемых в высших учебных заведениях, не требуется никаких специфических способностей, никаких особых черт характера, что нежелание учиться у студента появляется, как правило, в результате неправильного построения учебного процесса, что педагог обязан быть умнее ученика, что всегда можно и нужно научить учащегося тому, чему нужно, даже если он на данном этапе и не понимает, зачем это ему нужно. Такого понимания, к сожалению, не всегда можно добиться, и в подобной ситуации нет ничего страшного, если только на самом деле обучение происходит именно тому, что необходимо. Чтобы это было действительно так, тратится много времени на создание и совершенствование учебных планов и программ.

Однако одних программ и учебных планов недостаточно, чтобы обучение осуществлялось наиболее рациональным образом и с оптимальной пользой для дела. Важное значение для успеха имеет правильно поставленная и хорошо продуманная вплоть до деталей методика преподавания. Получаемый при этом хороший конечный результат сторицей оправдывает все усилия, затраченные на продумывание методики обучения. Особенно большую роль она играет тогда, когда нужно преодолеть нежелание, внутренний протест учащегося или когда у него имеется лишь незначительно выраженный, пассивный, если так можно сказать, интерес к изучаемому предмету. Не менее важна правильная методика и в том случае, когда учащийся достаточно интересуется предметом, однако у него нет внутренней уверенности в том, что он способен им овладеть в нужной степени. В этой ситуации, которая встречается весьма часто, один неосторожный шаг педагога, одна его бестактность могут привести к потере у учащегося всякого интереса и, как следствие этого, к принятию им тех или иных, по существу, необоснованных решений, которые нанесут ему трудно исправимый вред.

Внимательное и продуманное отношение к студенту помогает правильному окончательному выбору его

будущей специальности, способствует наиболее полному раскрытию его индивидуальных способностей. Случается, что окончательный выбор специальности оказывается совсем не тот, который намечался первоначально.

Так, например, в Московском физико-техническом институте, который готовит инженеров-физиков в различных областях современной науки и техники (несколько лет назад в МФТИ был, кроме того, создан факультет управления и прикладной математики), изучение математики для большей части студентов является не самоцелью, а неизбежной необходимостью, обусловленной тем, что математические методы играют большую роль при изучении физических явлений. Встречаются студенты, которые не имеют вкуса и интереса к математике, не понимают важности владения ею для своей будущей специальности и, более того, убеждены, что она им будет не нужна (и уж во всяком случае в том объеме, в котором она с них требуется в процессе обучения). Тем не менее преподавание математики в МФТИ удалось поставить таким образом, что все студенты, как правило, приобретают достаточно высокую математическую культуру и фундаментальные знания, позволяющие им в случае надобности овладеть дополнительными знаниями по математике, необходимыми для их дальнейшей работы.

Оригинальная система обучения математики, созданная в МФТИ, характеризуется достаточно глубоким изучением основных математических понятий и не перегруженностью второстепенными деталями. Большое внимание обращается на постоянные контакты преподавателей со студентами, на индивидуальную работу с каждым студентом, на своевременную ему помощь, на максимальное содействие развитию у него инициативы и навыков самостоятельной работы, на воспитание на основе прочных знаний уверенности в собственных силах. Все это вместе взятое позволяет более широко и свободно, чем обычно, раскрыться индивидуальным математическим наклонностям отдельных студентов. Это не раз приводило к тому, что они выбирали себе специализацию с более сильным математическим уклоном, чем предполагали вначале,

а иногда становились просто математиками и даже не прикладными, а «чистыми», достигая в математике больших, а порой и выдающихся успехов.

Впрочем, надо сказать, что те из выпускников МФТИ, кто в своих занятиях математикой использовали свое физическое образование, черпали постановки проблем из прикладных задач и при их математическом решении прибегали, когда надо, к помощи физической интуиции, имели безусловное преимущество перед своими коллегами, получившими чисто математическое образование. Это преимущество во многом способствовало незаурядному успеху многих из них.

Подчеркнем еще, что вопросами методики преподавания нельзя пренебрегать и при обучении учащихся, которые хотят учиться, учатся с интересом, имеют природные склонности к изучаемому предмету и, скажем, имеют даже повышенные способности. И в этом случае неправильно поставленное обучение может привести к тому, что учащиеся усвоят изучаемый ими материал формально, не овладевают им по существу, а потому понапрасну потратят драгоценное время. Может случиться, например, что в результате перегруженности получаемой информацией и практической невозможности ее освоить даже способный учащийся может потерять интерес к изучаемому предмету и оказаться вынужденным (ввиду необходимости сдачи зачетов и экзаменов) недобросовестно относиться к изучению соответствующей дисциплины. Конечно, даже при такой ситуации учащийся чему-то научится. Однако это не возместит ему ни зря потраченного времени, ни нанесенного ему морального ущерба в связи с приобретением им опыта недобросовестной работы.

Обучение должно быть построено таким образом, чтобы в его процессе учащийся, получая знания, удивлялся и восхищался мудростью тех, кто принес людям эти знания, удивлялся и восхищался гармонией (а там, где ее нет, удивлялся дисгармонии) вещей, с которыми его знакомят, чтобы он по существу оценивал смысл и значение приобретаемых знаний. Одним из необходимых условий осуществления этого является наличие достаточного времени для того, чтобы

учащиеся имели возможность усвоить и обдумать полученную информацию.

Чрезмерная поспешность при обучении может существенно уменьшить его пользу. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения и развитием способностей обучаемого к дальнейшему самостоятельному образованию.

Серьезное учение — это большой труд. Его эффективность, как и всякого труда, во многом зависит от его организации. В частности, обучение, протекающее таким образом, что у обучающегося поддерживается постоянный интерес к изучаемому предмету, что весь процесс обучения доставляет ему удовольствие (даже тогда, когда приходится преодолевать существенные трудности), приводит не только к приобретению прочных профессиональных знаний, но и к воспитанию органической потребности к труду, к тому, что труд в дальнейшей жизни будет приносить чувство удовлетворения и искренней радости.

Конечно, организация обучения указанным образом является очень трудной задачей. Здесь, как нигде, имеет огромное значение индивидуальное искусство преподавателя, его собственное отношение к профессии преподавателя и к предмету, которому он обучает.

В связи с этим следует отметить еще один часто встречающийся недостаток преподавания, наблюдаемый даже у весьма квалифицированных преподавателей и состоящий в том, что они забывают, что выбрали свою профессию по своим природным склонностям, согласно свойствам своего мышления, что они увлечены своей профессией, что для них она является часто самым главным, самым важным в жизни, забывают о том, сколько времени при всех своих способностях они потратили на овладение своей профессией, забывают, наконец, о том, что предмет, которому они обучают студента, может быть ему чужд по своему внутреннему стилю, не вызывает у него интереса, что изучает он его по необходимости, что встретился он с ним первый раз и что времени у него на это мало.

Обо всем этом хорошо и выразительно сказал А. Н. Крылов: «В основу учебных планов кладутся программы. Каждая программа составляется профессором, заведующим кафедрой и преподавателями по этой кафедре, т. е. специалистами по данному предмету, и они всегда склонны изложить предмет «в полном его объеме», как бы забывая, что сами они в своей преподавательской деятельности изучали свой предмет может быть 15, 20, 25 лет, а то и более, а студент на изучение этого предмета может уделить лишь небольшую часть года или полугодия, ибо одновременно студенту надо изучить и ряд других предметов, в равной степени обязательных, и сдать по ним экзамены и зачеты» *).

К этому следует еще добавить, что если измерять успех педагогического процесса не тем, что «начитано на лекции», а тем, что в результате усвоено студентами, то существующую во многих высших учебных заведениях традицию заканчивать чтение лекций почти перед самым началом экзаменационной сессии вряд ли можно признать целесообразной, поскольку она просто не дает студентам времени и возможности овладеть нужным образом материалом, изложенным на лекции. В результате в подобной ситуации много усилий преподавателей оказывается потраченными впустую. Было бы гораздо полезнее, если бы между окончанием лекций и началом экзаменационной сессии был бы трех-четырехнедельный интервал, во время которого интенсивно велись практические и семинарские занятия, а для желающих проводились дополнительные консультации. Там, где так и делается, этому сопутствует неизменный успех в усвоении студентами изучаемого материала.

Отсутствие взаимопонимания между студентами и преподавателями — большой недостаток любого педагогического процесса. Надо всегда помнить о том, что недостаточно руководствоваться правильными принципами (точнее, принципами, которые преподаватель сам считает правильными, поскольку установить объективные критерии, по которым можно было

*) А. Н. Крылов, Воспоминания и очерки, Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 623.

бы судить, какой принцип является правильным, а какой нет, нередко не представляется возможным), надо уметь воплотить их в своей работе, в лекциях, в семинарских занятиях. Как это надо делать — заслуживает подробного и самостоятельного изучения. Отметим здесь лишь, что всякому лектору или преподавателю, ведущему семинарские занятия (и не только начинающему), полезно время от времени брать непосредственно после лекции или занятий десяток тетрадей с записями, только что сделанными его студентами, чтобы посмотреть, что же из того, чему он хотел научить студентов, осталось у них зафиксировано (надеяться на память неразумно — память вещь ненадежная). Если он в двух-трех тетрадях найдет не то, что он хотел бы увидеть, то в дальнейшем ему целесообразно попытаться внести необходимые изменения в свою методику с тем, чтобы в тетради любого студента было записано во всяком случае то, что он хочет.

Впрочем, как показывает опыт, этот совет практически очень трудно выполним, ибо лектор или преподаватель, ведущий семинарские занятия, который не был бы внутренне убежден, что он делает свою работу наилучшим образом и что поэтому ему нет нужды смотреть в тетради студентов, встречается очень редко. А ведь следует помнить, что контроль над записями студентов полезен еще и потому, что дает возможность преподавателю помочь им научиться заниматься, научиться работать, вести необходимые записи (все это также является, безусловно, обязанностью всякого преподавателя, о чем, к сожалению, обычно забывают). К этому можно лишь добавить, что еще реже встречаются преподаватели, которые, взяв у студентов записи после прочитанной ими лекции или проведенного ими занятия и не найдя в них того, что они хотели бы увидеть, посчитали виноватыми себя, а не студентов.

Это, конечно, очень жаль. По-видимому, при этом просто забывают, что преподавание является профессией и что тот, кто желает преуспеть в ней, должен не жалеть ни времени, ни энергии для овладения ею. Как и в случае любой другой профессии, одним это удастся сделать легче, другим труднее.

Вспоминается один из лучших лекторов механико-математического факультета Московского университета 40—60-х годов. Его лекции отличались необычайной четкостью, ясностью и глубиной мысли, большой эмоциональностью и, при всем этом, легко записывались и хорошо усваивались. Вместе с тем, он рассказывал, что когда он начинал свою педагогическую деятельность, студенты, возмущенные невозможностью ни понять, ни записать его лекции, пришли к декану с просьбой заменить его другим лектором. Тогда он поставил себе целью овладеть методикой чтения лекций, отнесся к этому как к важному и серьезному делу и в результате достиг действительного, даже, можно сказать, удивительного, педагогического мастерства. Этот пример показывает, в частности, что не нужно отчаиваться, если что-то не ладится с преподаванием. Надо быть только самокритичным, проанализировать причины неудач и попытаться нащупать правильный путь исправления имеющихся недостатков. Если приложить серьезные усилия и быть достаточно терпеливым, то, как правило, всегда удастся достичь положительных результатов и в конце концов научиться учить.

Говоря о работе со студентами, нельзя не отметить, что лекция или семинарские занятия окажутся эффективными, конечно, лишь в том случае, когда преподаватель свободно владеет материалом, который он излагает, и, в частности, не пользуется каким-либо видом шпаргалками. Небезынтересно вспомнить, что революционный Конвент Франции издал в 1794 г. декрет, запрещающий профессорам пользоваться во время лекций своими записками.

Само собой разумеется, что и это положение нельзя понимать в категорической форме: в лекционном материале могут найтись отдельные места, которые требуют громоздких и сложных вычислений (в широком смысле этого слова) и которые по какой-то причине необходимо изложить на лекции. Такая ситуация является, конечно, исключением, а не правилом в математических курсах. В подобном случае вполне допустимо для лектора воспользоваться во время лекции своими записями. Более того, это даже целесообразно, так как этим самым студентам

показывается, что не всякую информацию, которая им сообщается, следует стараться полностью запомнить. При этом на экзаменах нужно не забыть разрешить студентам пользоваться своими конспектами по тем вопросам, которые лектор рассказывал на лекциях, прибегая к своим записям.

Нельзя, правда, не заметить, что разрешение студентам пользоваться своими конспектами при сдаче экзаменов бывает разумным не только в указанной ситуации.

После всех данных советов трудно удержаться от еще одного: успеха в преподавании можно достичь не критикой других, равно как обучающихся, так и обучающихся (это делают все, в том числе и автор), а критикой самого себя. Не вызывает сомнения, что этот принцип не вредно почаще применять и в других областях человеческой деятельности.

2. О СУЩНОСТИ МАТЕМАТИКИ

Вопрос о том, чему и как учить в математике, вновь остро обсуждается в настоящее время в связи с повышением роли математических методов как при решении конкретных практически важных задач, так и при проведении самых разнообразных теоретических исследований. Вот как оценивает роль математики уже упоминавшаяся XIX Международная конференция по народному образованию: «...математика имела во все времена бесспорное культурное и практическое значение, играла важную роль в научном, техническом и экономическом развитии, ...наша эпоха создает невиданные ранее условия расцвета математики...»^{*)}.

Математизация — это характерная черта современной науки и техники. Человечество ныне как никогда осознало, что знание, уж во всяком случае в области естественных наук, делается точным только тогда, когда для его описания удастся использовать математическую модель (уже известную, либо специально созданную).

^{*)} Математическое просвещение. Вып. I, Гостехиздат, М., 1957, стр. 15—22.

Вместе с увеличением объема приложений математики продолжает интенсивно развиваться и она сама, причем ее развитие, как и всегда, стимулируется не только внешними, но и внутренними факторами.

Убедительным примером содержательности внутреннего развития математики и пользы от этого не только для нее самой, но и для ее приложений, является создание древнегреческими математиками теории конических сечений, которая не находила своего применения «две тысячи лет, пока Кеплер воспользовался ею для создания точной теории движения небесных тел, а от этой теории Ньютон затем создал механику, служащую основой всей физики и техники»^{*)}).

Другим подобным примером может служить теория групп, зародившаяся в конце XVIII века в недрах самой математики (в 1771 г. Ж. Лагранж рассмотрел группы подстановок в связи с изучением алгебраических уравнений, разрешимых в радикалах) и нашедшая лишь в конце XIX века свое плодотворное применение в кристаллографии, а позднее в теоретической физике.

Наконец нельзя не отметить внутреннее возникновение в математике «воображаемой геометрии» Н. И. Лобачевского, которая сыграла очень важную роль как в развитии самой математики, так и в эволюции наших гносеологических представлений об окружающем нас мире.

Внешние стимулы могут влиять на развитие математики по-разному. С одной стороны, это может быть связано с изучением реальных явлений математическими методами. Например, изучение задач механики, законов движения материальных тел, вычисление площадей и объемов, привело к созданию дифференциального и интегрального исчисления. С другой стороны, случается, что наблюдение какого-либо явления приводит к постановкам чисто математической задачи, которая исследуется сама по себе, уже без связи с самим явлением. Так, древние греки,

^{*)} А. Н. Крылов, Воспоминания и очерки, Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 589,

заметив, что высоты звучания струн зависят от их длины, стали заниматься изучением отношений чисел и назвали эту часть математики музыкой.

В настоящее время в результате появления быстродействующих вычислительных машин появились качественно новые возможности использования математических методов. Они применяются ныне не только там, где это делалось издавна (например, в механике, в физике), но и там, где двадцать — тридцать лет назад об этом не было и речи (в экономике, геологии, социологии, лингвистике, биологии, медицине, управлении и т. п.). Огромную роль, которую играет вычислительная техника в экономике современного развитого государства, образно выразил еще около пятнадцати лет назад американский президент Дж. Кеннеди, сказав, что, если бы в то время в Америке остановились все вычислительные машины, то это была бы столь большая катастрофа, что ничего подобного ей его страна никогда прежде не переживала.

Заметим, что с появлением новых возможностей использования математики, связанных с современной вычислительной техникой, не потеряли своего значения и методы классической математики, в частности качественные математические исследования. С помощью подобных методов производится, например, правильная постановка математических задач, создание новых математических моделей, отбор материала для просчитывания его на вычислительных машинах и разработка новых вычислительных методов.

Вопрос о роли, значении и содержании математики в последнее время стал привлекать большое внимание. Высказывалось много критических замечаний в адрес современной математики и математиков. Это видно даже из заголовков появляющихся в печати статей: «Можно ли спасти математику»*), «Физики против математиков?»**), «Математики сами за се-

*) У. Дж. Спон-младший, Можно ли спасти математику. — Природа, АН СССР, 1973, № 2, стр. 50—53. См. там же: А. А. Дородницын, Что нужно спасать? и С. П. Новиков, Необходима перестройка математического образования.

**) Л. Письмен, Физики против математиков? — «Знание — сила», 1972, № 2, стр. 30—31.

бя»*) и т. п. Встречаются высказывания, в которых сквозит явное разочарование в возможностях достижения существенных успехов в решении многих жизненно важных задач с помощью математических методов, где это еще совсем недавно казалось близким и возможным.

- Это связано с тем, что первое использование быстродействующих вычислительных машин для решения конкретных задач, например, инженерно-технических или задач управления и планирования производством, оказалось сплошь и рядом весьма успешным и привело к широкому распространению мнения об универсальности и могуществе математических методов, о том, что нужно лишь применить соответствующим образом математику в экономике, биологии или какой-либо другой науке, как в них автоматически произойдет большой прогресс. К чести самих математиков, следует заметить, что они сами не причастны к созданию этого мнения, которое, конечно, весьма наивно.

Дальнейшие события показали, что без развития экспериментальных и теоретических исследований в какой-либо науке (например, той же экономике или биологии) невозможно существенное продвижение вперед за счет только применения математических методов. Для построения содержательной математической модели в экономике или биологии необходимо знание экономических, соответственно биологических законов, нужны прежде всего содержательные экономические или биологические гипотезы.

Положение математики в настоящее время можно сравнить с успешной деятельностью некоторой фирмы, в результате которой фактическая стоимость ее акций непрерывно растет (роль и значение математики действительно непрерывно и, по существу, все время увеличивается). Вследствие роста стоимости акций на них естественно повышается спрос, что в свою очередь приводит к некоторому повышению их рыночной стоимости, которая тем самым оказывается превышающей настоящую стоимость. Нечто подобное

*) Ю. Шрейдер, Математики сами за себя. «Знание — сила», 1972, № 2, стр. 32—33.

произошло и с математикой: в связи с колоссальными успехами, достигнутыми в результате использования быстродействующих вычислительных машин при решении актуальных научных и хозяйственных проблем, не вполне компетентные специалисты создали некоторый бум вокруг математики, что привело к определенной ее фетишизации. Сказались эти успехи и на положении математиков, которые стали играть в обществе более значительную роль (естественно, за счет утраты определенных позиций их коллегами из других областей науки, что не могло не вызвать известного раздражения у части из них).

Когда все стало на свои места, и достаточно четко обрисовались реальные контуры использования математических методов и выявились ошибки, допущенные при подготовке кадров, необходимых для правильного применения современной вычислительной техники, у некоторых людей появился определенный скепсис (а у некоторых он существовал всегда) в отношении математики, возродив снова разговоры о том, что математика-де не наука, а язык (высказывание, восходящее к известному физику Гиббсу), что математика — это жернова, которые сами по себе ничего не производят, а только мелют то, что в них засыпают (Гексли) и т. д. и т. п. Все это не ново, как говорит Гарднер*): «Никогда не было недостатка в хулителях математики».

Справедливости ради следует заметить, что высказывания подобного рода делаются не только извне в адрес математики в целом, но и «внутри» самой математики, если так можно выразиться. Например, от математиков, занимающихся «классическими вопросами», нередко можно услышать, что функциональный анализ не наука, а язык, а от математиков, решающих задачи на ЭВМ, что классическая математика является схоластикой. Это все высказывания одного порядка.

Что бы ни говорили отдельные скептики, роль и значение математики в настоящее время продолжает увеличиваться и соответственно, продолжает расти число людей, занимающихся математикой. Например,

*) М. Гарднер, Математические досуги, «Мир», М., 1972.

в США*), по статистическим данным на 1963 г., имелось 42,1 тысячи математиков. Согласно же Бюро статистики труда США их число к 1975 г. должно было увеличиться до 87,2 тысячи человек, т. е. на 107,8%, что больше чем прогнозируемый прирост к тому же году инженеров, химиков, физиков, биологов и других ученых-естественников, т. е. научных работников в области наук о земле, ученых-металлургов и т. д.

В Канаде на будущее даются такие рекомендации**): «На разных ступенях нашего общества, в том числе в университетах, в сфере бизнеса, в промышленности, в соответствующих департаментах федерального правительства и местных органов власти, необходимо приложить определенные усилия, направленные на более эффективное развитие математики и подготовку специалистов, владеющих математикой».

Во Франции положение описывается следующим образом***): «Признано так же, что до сих пор слишком мало внимания уделялось условиям труда математиков. Пятый пятилетний план обеспечил им помощь в лице научных секретарей, технических помощников и специализированных переводчиков. Предусмотрены также ассигнования на приобретение литературы и значительное облегчение с изданием трудов по математике. Математики располагают крупными суммами на поездку за границу и на приглашение во Францию крупных иностранных специалистов». Далее там же пишется: «В настоящее время намечается поворот к новым сферам применения математических методов, а именно праксеологии, которая становится наукой, приобретающей фундаментальное значение, и в подготовке крупных социальных решений, определяющих будущее человечества: планирование, планировка застройки районов, пути сообщения, модернизация сельскохозяйственных предприятий, политика развития слаборазвитых стран и т. п.».

*) Политика США в области науки, «Прогресс», М., 1971.

**) A. J. Coleman, G. D. Edwards, K. P. Beltsner, Mathematical sciences in Canada. — Science Council of Canada, № 38, 1975, стр. 181.

***)) Б. Илечко, Научные исследования во Франции, «Мир», М., 1971, стр. 104.

Подобная ситуация типична для всех развитых стран.

Так что же такое математика и математические модели, изучением которых она занимается?

Математическая модель — это логическая структура, у которой описан ряд отношений между ее элементами. Математика представляет собой стройную и глубокую совокупность знаний о математических моделях со своими проблемами, с собственными путями развития, обусловленными внутренними и внешними причинами и задачами. Математика представляет интерес прежде всего сама по себе, как совокупность объективных истин. Кроме того, математика дает удобные и плодотворные способы описания самых разнообразных явлений реального мира и тем самым действительно выполняет в этом смысле функцию языка. Эту роль математики прекрасно осознавал еще Галилей, сказавший: «Философия написана в грандиозной книге — Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики...» *).

Наконец, и это очень важно, математика дает людям мощные методы изучения и познания окружающего их мира, методы исследования как теоретических, так и чисто практических проблем**). С помощью математики решается много важных и актуальных технических и экономических задач, имеющих первостепенное значение для хозяйства страны, что превратило математику в производительную силу общества.

Итак, коротко резюмируя, можно сказать, что математика — это область человеческого знания, в которой изучаются математические модели. Математический язык является удобным языком для описания

*) «The Assayer», Discoveries and opinions of Galileo, Doubleday Anchor Books, New York, 1957, p. 237—238.

**) Популярное, интересно написанное и вместе с тем глубокое освещение вопросов, связанных с сущностью математики, читатель может найти в брошюре Альфреда Реньи «Диалоги о математике» и в предисловии к ее русскому изданию («Мир», М., 1969), написанному Б. В. Гнеденко.

реальных явлений, а математические методы — плодотворными методами их изучения.

Оставляя в стороне философские и лингвистические обоснования, область человеческого знания, именуемую математикой, будем называть все-таки наукой, а не языком, независимо от того, понимать ли под языком только язык описания или и язык логического вывода. Мы не будем заниматься философским содержанием и углубляться в сущность понятий «математическая модель» и «математика». Это глубокие философские вопросы, и рассмотрение их не входит в нашу задачу. Если кто-то все-таки продолжает считать математику языком, тот может каждый раз, когда будет говорить о математике как о науке, говорить про себя: язык, язык, язык. От этого ровно ничего не изменится в понимании нижеследующего, это нисколько не повлияет на смысл всего дальнейшего.

Возвращаясь к месту и роли математики в жизни и деятельности человечества, приведем цитату из обзора «Математические науки в Канаде *»). «В двадцатом столетии центральное ядро математических наук, традиционно называемое чистой математикой, развивается очень быстро. Те, кто сегодня обращаются к изучению чистой математики, сталкиваются с удивительными математическими структурами, о которых столетие назад невозможно было и мечтать. Исследования, проводимые чистыми математиками, нередко находятся далеко от практического их использования и представляют собой красивые и изящные абстрактные математические системы. Они являются развивающимся видом искусства, способом выражения которого являются не слова, звуки или краски, а мысль. Результаты в чистой математике оцениваются не по непосредственной пользе, которую они приносят и которая обычно отсутствует, а по их логической завершенности и по мастерству их выполнения. Даже если некоторые из них совершенно «бесполезны», они,

*) A. J. Coleman, G. D. Edwards, K. P. Beltsner, Mathematical sciences in Canada, — Science Council of Canada, № 38, 1975, стр. 46.

безусловно, займут место среди культурных ценностей человечества».

Эта цитата еще раз подчеркивает высказанную выше мысль о том, что ценность математики состоит не только в ее практических приложениях, но и в ней самой, как самостоятельной науке.

Расширение использования и приложения математических методов, в которых нуждаются многие области науки и техники, немыслимо без развития самой математики, и наше время красноречиво подтверждает это: ныне, как никогда, мы являемся свидетелями бурного роста как самой математики, так и роста применений математических методов в других науках. Математика всегда играла и продолжает играть огромную, все увеличивающуюся роль в естествознании, а теперь и в гуманитарных и социальных науках. Ее методы, как методы исследования и описания явлений, их моделирования широко проникают во все науки и с их помощью часто удается достигнуть значительного прогресса. В качестве примера можно привести уже ставшие хрестоматийными такие теоретические открытия, как открытие планеты Нептун, открытие электромагнитных волн или открытие позитрона, сделанные сначала математически «на кончике пера» и лишь потом нашедшие свое экспериментальное подтверждение. В век бурного развития вычислительной техники в математическом моделировании наряду со «старыми» классическими разделами математики, как, например, алгебра, теория дифференциальных, интегральных и разностных уравнений, теория вероятностей, используются и более новые — математическая логика, функциональный анализ, теория машинных языков, теория информации, теория операций и многие другие.

Одним из распространенных способов изучения явлений математическими методами по-прежнему остается моделирование этих явлений в виде дифференциальных уравнений. Для их составления нужно знать только локальные связи и не нужна информация обо всем явлении в целом. Это существенно упрощает задачу, поскольку, образно говоря, в малом все линейно. Например, при составлении уравнений колебаний струны не используется тот факт, что струна, выве-

денная из положения равновесия, совершает колебательное движение, а используется лишь упругий характер сил сцепления отдельных ее элементов. В результате получается уравнение, решения которого имеют колебательный характер. С его помощью можно провести качественный и количественный анализ движения струны в целом, поскольку оно достаточно хорошо соответствует реально происходящему явлению. Таким образом, в данном случае вся информация о поведении объекта в целом заложена в информации об его локальном поведении, на основе этой информации строится математическая модель, которая дает возможность изучать явление в целом, предсказывать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящих в нем с течением времени.

Напомним, что именно так и было открыто волнообразное распространение электромагнитных волн: от локальных свойств явления к уравнениям, а от уравнений к описанию явления в целом. Не лишне, однако, отметить, что лишь только после экспериментального подтверждения Герцем фактического существования электромагнитных колебаний стало возможным рассматривать уравнения Максвелла как математическую модель реального физического явления.

Правильность физической интерпретации математической модели может быть установлена только непосредственным опытом. Пока он не осуществлен и не привел к положительным результатам, «математическое открытие» в данной конкретной области знания, т. е. умозаключение о свойствах каких-то изучаемых в этой области реальных явлений, сделанное на основе исследования некоторой математической модели, не является еще открытием в рассматриваемой области знания. Так, например, станет или нет действительным открытием теоретическое «открытие» монополя, покажут лишь будущие эксперименты.

При применении математических методов к решению прикладных задач возникают новые математические модели, которые часто начинают потом изучаться сами по себе, без связи с теми конкретными задачами, которые их породили. Так происходило всегда, например, при истории создания дифференциального и интегрального исчисления на базе изучения

задач механики. Происходит это и сейчас, когда создаются математические модели в экономике, биологии, теории управления и других науках. Дать оценку результатам теоретического изучения новых математических моделей, как и вообще любым теоретическим исследованиям, непосредственно тогда, когда они выполнены, бывает очень трудно, и история знает немало примеров допущенных ошибок при оценке новых теорий. Достаточно вспомнить осуждение Остроградским неевклидовой геометрии, созданной Лобачевским, или враждебное отношение Кронекера к теории множеств Кантора, или порицание многими математиками таких направлений, как топология и математическая логика на заре их создания. И здесь дело не в изолированной точке зрения отдельных ученых: например, в упомянутых случаях и Остроградский и Кронекер являлись выразителями мнения большой авторитетной группы математиков.

Самостоятельное изучение возникающих математических моделей и их обобщений закономерно и неизбежно, и только время покажет, изучение каких из этих моделей заслуживает пристального внимания, а каких нет.

Немаловажно заметить, что теоретические математические исследования, в отличие от многих других, практически ничего не стоят государству, ибо для их проведения ничего, кроме пера и бумаги (и, конечно, чьей-то головы), не нужно. Математики, ведущие теоретические исследования, обычно занимаются преподавательской деятельностью, принося тем самым непосредственную и ощутимую пользу обществу, и получают за это зарплату, которая является для них надежным обеспечением их средств существования.

Само собой разумеется, что теоретическими исследованиями не должно исчерпываться изучение конкретных задач: практическая ценность математических исследований прикладных задач определяется прежде всего конкретными результатами — только они являются истинным критерием их значимости.

Неправильная оценка значения математики в научном прогрессе, оценка ее места в науке и ее роли при решении конкретных задач, стоящих перед обществом в данный момент времени, нередко связаны

с неправильным представлением о сущности математических знаний, о сущности понятия математической модели, о сущности самой математики и математических методов. Нередко математическая модель смешивается с реальным явлением, для описания которого она пригодна в каком-то смысле, что, кстати, приводит иногда и к искажению целей преподавания математики; и уж во всяком случае порождает весьма спорные высказывания и поток поучений в журнальных статьях и докладах, посвященных вопросу о том, как надо в настоящее время учить математике, чтобы в результате получились специалисты, которые смогли бы успешно применять ее к решению прикладных задач (к этому потоку относится, конечно, и настоящее сочинение).

Поясню свою мысль на примере одного старого анекдота.

Физик-теоретик и математик занимались одной и той же задачей, описываемой некоторым уравнением. Однажды математик с радостным видом подбежал к физику и сказал, что наконец-то сегодня он доказал, что уравнение, которым они занимаются, имеет решение.

— Дорогой мой,— ответил ему физик, снисходительно похлопав его по плечу,— если бы я хоть минуту сомневался, что решение существует, то я бы давно перестал заниматься этой задачей!

Этот анекдот как бы говорит,— вот-де мол какие простаки математики, занимаются бесплодными, никому, кроме них самих, не нужными мудрствованиями. Однако, если посмотреть чуть поглубже, то нетрудно понять, что это вовсе не анекдот о незадачливом математике, занимающемся бесполезной деятельностью, а анекдот о том, как люди не хотят (а иногда, может быть, не могут) понять друг друга; о том, как люди говорят как будто бы на одном языке, а на самом деле на разных; о том, как, думая, что они обсуждают одну и ту же проблему, они на самом деле имеют в виду разные. Истинная соль этого анекдота в том, что физик говорит о физическом явлении, а математик о его математической модели.

Математическая модель физического явления не является и не может являться идентичной, адекватной

самому явлению. Всякое математическое описание явления означает известную его логическую идеализацию, не говоря уже о том, что это описание происходит с определенной степенью точности в результате отбрасывания ряда факторов, которые, несмотря на кажущуюся «незначительность» и «малость», могут в каком-то смысле существенно повлиять на конечный результат. Поэтому из существования решения физической задачи, которое имел в виду физик, не следует существования решения соответствующей математической задачи; ее существование можно установить или опровергнуть только математическими рассуждениями.

Думать, что это не так, т. е. считать, что из существования решения физической задачи следует существование решения ее математической модели, тем самым полагая, что математическая модель равносильна в этом смысле физическому явлению, означает приписывание математике такой силы и общности, которой она, увы, не обладает.

Не спасет здесь положение развитие и совершенствование вычислительной техники: самый «мудрый» блок сверхсовершенной вычислительной машины содержит в себе только ту математическую модель, которая в него заложена или выведена машиной из других заложенных в нее математических моделей, а не само физическое явление, которое описывается рассматриваемой математической моделью.

Отметим, что здесь речь, конечно, вовсе не шла об использовании физической интуиции при исследовании модели физического явления математическими методами. Использование физической интуиции, и не только интуиции, а и обоснованных физических умозаключений, в этом случае, безусловно, целесообразно и весьма полезно. К вопросу об интуиции мы вернемся в дальнейшем. А сейчас подчеркнем, что когда исследуется математическая модель, то физические соображения имеют лишь наводящий правдоподобный характер и не имеют доказательной силы. Лишь после того как математически доказано, что существует решение уравнения, моделирующего некоторое физическое или какое-либо другое реальное явление или, по крайней мере, численно найдено приближение этого решения и опытным путем установлено, что оно

соответствует реальной ситуации, можно говорить о том, что рассматриваемая математическая модель достаточно хорошо описывает изучаемое явление и ее можно с достаточным успехом использовать для его исследования, прогнозирования дальнейших событий, для управления входящими в него объектами и т. д. и т. п.

Конечно, совсем не следует думать, что каждое математическое решение задачи, моделирующей некоторое реальное явление, следует проверять эмпирически. Когда уже установлено, что соответствующая математическая модель достаточно хорошо описывает определенный круг явлений (как, например, законы Ньютона — описывают механические движения), необходимость экспериментальной проверки, естественно, отпадает.

Приведенный выше анекдот отражает собой также широко распространенную тенденцию обвинения математиков в излишнем увлечении теоремами существования при проведении, например, исследований конкретных задач математическими методами, или при обучении математике будущих физиков, инженеров и т. п. К этому вопросу мы вернемся в дальнейшем.

Подчеркнем еще, что математика изучает математические модели, а эти модели могут являться моделями реальных физических, химических, биологических, экономических, социальных и других явлений, поэтому изучая эти модели, мы изучаем тем самым указанные реальные явления, т. е. с помощью математических моделей математика дает возможность исследовать процессы, протекающие в окружающем нас мире. В этом огромное гносеологическое значение математики. При этом не следует забывать, что одна и та же математическая модель может соответствовать совершенно различным реальным явлениям. Так, например, с помощью уравнения Лапласа описываются стационарное распределение тепла в твердом теле, течение жидкости, явление кумуляции и т. д.

Это свойство математических моделей выражает абстрактность математики. По поводу этого А. Пуанкаре остроумно сказал: «Математика — это искусство давать разным вещам одно наименование». Можно

добавить, что не только «давать название», но и изучать разные вещи одним методом.

Итак, мы видим, что простая фраза «математика изучает математические модели» не так проста на самом деле, как она может показаться с первого взгляда.

Абстрактность математики порождает определенную трудность ее применения к описанию конкретных задач, в то же самое время абстрактность математики придает ей силу, универсализм и общность. Не следует смешивать математику и ее применения. Сама математика является абстрактной наукой, а ее применения могут быть весьма конкретными. При этом следует помнить, что нельзя обучить приложениям математики, не научив самой математике.

Говоря о математике и математических моделях, нельзя не сказать несколько слов и о математическом моделировании. Выше подчеркивалось, что для построения математической модели нужно обладать не только математическими, но и глубокими специальными профессиональными знаниями. Не нужно, однако, думать, что для успешного математического моделирования необходимо знать и понимать сущность моделируемого физического, биологического, экономического или какого-либо еще процесса, знать причины, порождающие этот процесс. Совсем нет! Может случиться, что эта сущность и вовсе еще не известна, а тем не менее оказывается возможным в случае, если известны определенные связи разных частей изучаемого явления, создать математическую модель, достаточно хорошо отражающую внешние нужные стороны изучаемого явления и тем самым получить возможность изучать его и предвидеть, предсказывать его дальнейшее развитие*). В этом находит свое выражение все та же абстрактность математики. Не следует только смешивать, отметим еще раз, само явление с его математической моделью.

Математическое моделирование в связи с интенсивным процессом математизации наших знаний и широким использованием ЭВМ для изучения разнообраз-

*) Это в равной степени относится и к моделям не математическим, но рассмотрение их не входит в нашу задачу.

разных явлений превращается в настоящее время в один из самых актуальных и основных аспектов развития современной науки. Большой и сложный вопрос о роли математического моделирования, являющегося связующим звеном между математикой и другими науками, в жизни современного общества заслуживает, конечно, специального рассмотрения *). Мы же лишь коснемся этого вопроса еще раз в главе II, п. 9, когда будем рассматривать вопрос о преподавании математики.

Характерной чертой математических истин является их абсолютный и вечный характер, следовательно, они не меняются и не могут измениться с развитием наших знаний. Так, за последние две тысячи лет наши представления об окружающем нас мире и об управляющих им закономерностях претерпели существенные изменения, а, например, теорема Пифагора осталась и останется всегда такой же, какой она была в древней Греции. Это, конечно, не исключает того, что в процессе своего исторического развития многие математические понятия и утверждения не сразу обретали и обретают свою логически законченную форму, не исключает в особенности и того, что в процессе развития одни и те же объекты, изучающиеся в математике, воспринимаются с разных точек зрения, что приводит к раскрытию их новых свойств, наполняет их новым содержанием, что в свою очередь нередко существенно меняет наше представление об их значимости и важности.

При обучении математике ее будущего потребителя встает основной вопрос: «Чему надо учить прежде всего по математике в институте?» в свете происходящей математизации науки в наше время. При этом следует исходить из того, что время, отведенное на изучение математики в высших учебных заведениях, не может быть сколько-нибудь существенно увеличено по сравнению с тем, которое на нее уже отведено. Необходимо также ответить на следующие вопросы. Каково должно быть взаимоотношение дискретной и непрерывной математики? Каково должно быть отно-

*) См. по этому вопросу Н. Н. Моисеев, Математик задает вопросы..., «Знание», М., 1974.

шение их объемов в общем курсе математики? Как, на какой основе изучать численные методы? Где их место в общем курсе математики? Где и как обучать студентов использованию вычислительных машин?

Конечно, для представителей разных профессий требуется разный уровень математических знаний. Мы постараемся рассмотреть некоторые общие аспекты обучения математике студентов, которые после окончания института при работе по своей специальности будут использовать математические методы для решения конкретных задач, для теоретических исследований, непосредственно связанных с практикой (механикой, физикой, техникой, биологией, экономикой, управлением и т. д. и т. п.).

Впрочем, формулируемые ниже общие положения о преподавании математики применимы и для подготовки будущих профессионалов-математиков просто потому, что хорошо продуманные методика преподавания и содержание программ обучения всегда оправдывают себя.

Безусловно, что при подготовке математиков имеется еще ряд своих дополнительных особенностей. Читатель, интересующийся этим вопросом, может ознакомиться с ним в брошюре А. Н. Колмогорова «О профессии математика» *).

Нельзя здесь не отметить, что вопрос взаимопонимания тех, кто применяет в своей деятельности математические методы исследования для изучения реальных явлений, и так называемых «чистых» математиков — очень сложен. Там, где удастся достичь такого взаимопонимания, наступает плодотворное сотрудничество математики и ее приложений. В случае, когда для рассматриваемых приложений уже имеются готовые математические понятие и основные математические модели, решение задачи указанного взаимопонимания просто и имеет учебный характер. Эта задача очень сложна в том случае, когда отсутствуют даже элементарные математические модели простейших явлений, когда их надо только еще создавать, как, например, в настоящее время в ряде

*) А. Н. Колмогоров, О профессии математика, «Советская наука», М., 1954.

вопросов экономики, биологии, медицины, социологии, лингвистики. Постоянно возникают новые сложности в преподавании математики и в связи с ее собственным развитием, хотя, конечно, как правило, внедрение новых идей в преподавание математики довольно значительно отстает от их возникновения в ней самой.

За последние годы в преподавании математики в высших технических учебных заведениях заметны довольно существенные изменения, оказывающие благотворное влияние на математическое образование инженеров. Курс математики приобрел большую, чем раньше, прикладную направленность. Студенты обучаются использованию современной вычислительной техники для численного решения задач. В программу включены необходимые для этого разделы теории, например, элементы теории разностных схем, элементы математической логики и т. п. Обучение численным методам, как правило, основывается на фундаментальном общематематическом образовании. Происходит синтез анализа и линейной алгебры, значительно усилилась роль теории вероятностей и математической статистики, что нашло свое отражение в выделении на них большего числа часов в общем курсе математики, чем прежде. Вообще, следует отметить повышение общего уровня преподавания математики.

Из полезных методических новшеств можно отметить рассмотрение понятия функции как соответствия (это уже начинается со школьного курса и отражает качественно новую точку зрения на функцию), а не с помощью понятия переменной величины, изучение в анализе метода выделения главной части функции как основного метода изучения ее локальных свойств. В связи со всем этим происходит постепенное непрерывное изменение программ преподавания математики во вузах. Эта постепенность разумна, поскольку в традиционном преподавании математики имеется, безусловно, много ценного и полезного. Изучение ряда качественных, аналитических и геометрических методов оправдывает себя и, конечно, будет оправдывать себя еще многие годы. С другой стороны, использование в настоящее время повсеместно ЭВМ предъявляет новые требования к специалистам, которых го-

товят наши высшие технические и другие учебные заведения. Эти требования должны быть приняты во внимание при обучении студентов уже сегодня.

Вместе с тем, серьезно говорить о замене непрерывной (классической) математики дискретной математикой во всяком случае пока еще рано: несмотря на большие возможности современных вычислительных машин роль непрерывных математических моделей в изучении прикладных задач очень велика в настоящее время. Несерьезен и довод сторонников дискретной математики, состоящий в том, что следует отдать предпочтение дискретной математике в силу того, что реальный мир дискретен, и потому дискретная математика его лучше описывает, чем непрерывная. И непрерывная и дискретная математические модели не адекватны реальному явлению. Какую из них лучше применить, это зависит от конкретно изучаемой задачи, от вопросов, на которые нужно ответить, от степени разработанности математических методов, которые можно применить.

В целом надо честно признаться, что мы еще не знаем, как надо наиболее экономно и эффективно учить математике при современных к ней требованиях, не знаем просто потому, что еще не накопилось нужного для этого опыта, не написаны необходимые учебники. Последнее очень важно, потому что сколь бы ни была подробно написана программа, она не может быть повсеместно эффективно введена в действие, если не опубликован соответствующий ей учебник. Вместе с тем отдельные высшие учебные заведения уже накопили интересный опыт модернизированного преподавания математики, поэтому важной и насущной задачей стало изучение этого опыта, выработка общих рекомендаций, написание на основе их общих программ, издание нужных книг, причем не только учебников, но и соответствующих задачников.

При введении новых идей в преподавание математики совершенно необходимо, чтобы эти идеи могли активно применяться учащимися, использоваться ими при решении задач разной трудности, начиная от формальных упражнений и алгоритмических задач до задач, требующих для своего решения определенного уровня изобретательности, при этом набор

и тех и других задач должен быть достаточно большим. Студента надо учить думать и работать так, чтобы он умел активно использовать понятия и идеи, с которыми он познакомился в процессе обучения, а этому наиболее эффективно можно научиться с помощью самостоятельного решения задач. Несмотря на то, что это, казалось бы, самоочевидные вещи, о них приходится писать, так как иногда высказывается мнение, что можно идти по другому пути. Какой из возможных конкретных путей изучения математики в высших учебных заведениях при ныне происходящем изменении ее роли в науке лучше, экономнее, рациональнее, эффективнее покажет время.

Несмотря на все эти трудности, можно все-таки попытаться сформулировать некоторые общие принципы обучения математике в настоящее время и постараться их детализировать применительно к высшим учебным заведениям (ведь хорошо известно, что в общий принцип можно вкладывать весьма далекие друг от друга его конкретные интерпретации. Например, сейчас широко распространено мнение о том, что необходимо сблизить университетское и высшее техническое образование, и каких только конкретных интерпретаций этого не приходится слышать; нередко научный работник-теоретик и инженер-практик вкладывают в эту фразу почти диаметрально противоположный смысл).

В заключение обсуждения вопроса о сущности математики следует подчеркнуть большую роль математического образования при формировании общей культуры человека и, тем самым, большую ответственность в этом направлении, которую несут математики перед обществом.

Поясним более подробно эту сторону математического образования. Изучение математики совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует ее, приучает человека логически рассуждать, воспитывает у него точность и обстоятельность аргументации. Математика учит не загромождать исследование ненужными подробностями, не влияющими на сущность дела, и, наоборот, не пренебрегать тем, что имеет принципиальное значение для существа изучаемого вопроса. Все это дает возможность эффективно

исследовать и осмысливать новые задачи, возникающие в различных областях человеческой деятельности.

Весьма выразительно черты математического образования, влияющие на культуру человека в целом, были сформулированы в докладе В. Сервэ на той же XIX Международной конференции по народному просвещению: «Среди интеллектуальных свойств, развиваемых математикой, наиболее часто упоминаются те, которые относятся к логическому мышлению: дедуктивное рассуждение, способность к абстрагированию, обобщению, специализации, способность мыслить, анализировать, критиковать. Упражнение в математике содействует приобретению рациональных качеств мысли и ее выражения: порядок, точность, ясность, сжатость. Оно требует воображения и интуиции. Оно дает чутье объективности, интеллектуальную честность, вкус к исследованию и тем самым содействует образованию научного ума.

Изучение математики требует постоянного напряжения, внимания, способности сосредоточиться; оно требует настойчивости и закрепляет хорошие навыки работы.

Таким образом, математика выполняет важную роль как в развитии интеллекта, так и в формировании характера».

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1. О СОДЕРЖАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КУРСОВ

Как это ни странно, уже само понимание предмета математики, а значит, его содержание и расстановка в нем акцентов, вызывает разногласие. Мы будем исходить из следующего основного положения.

ПОЛОЖЕНИЕ ПЕРВОЕ. В курсе математики изучаются математические модели.

Как уже говорилось, объектами изучения в математике являются не реальные явления, а абстрактные логические объекты и структуры, у которых описан ряд отношений между их элементами (будем их коротко, как и прежде, называть математическими моделями), не размерные величины, а безразмерные. Математика изучает соотношения между элементами математических моделей, количественные и качественные связи между ними. Для математики важна не природа рассматриваемых объектов, а лишь имеющиеся между ними соотношения. Одна и та же математическая модель может описывать (с определенным приближением) свойства очень далеких друг от друга по своему конкретному содержанию реальных явлений. Так, например, формула

$$f = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

может описывать и закон Ньютона притяжения масс и закон Кулона притяжения электрических зарядов. Величины масс и зарядов, фигурирующие в этих законах, измеряются в разных единицах, имеют разную размерность. В математической же формуле соответствующие этим законам математические операции (в данном случае умножение и деление) производятся

по правилам действия над числами, независимо от того, значениями каких физических величин они являются.

Из сформулированного положения следует, что смысл математического понятия не зависит от области его дальнейшего применения, в частности, не зависит от специализации студента, которому разъясняется это понятие.

При этом следует подчеркнуть различие смысла и содержания математического понятия как такового и конкретного явления, для описания которого оно используется, например, понятия производной векторной функции и понятия скорости механического движения, понятия интеграла и понятия работы и т. п.

Сущность математики должна находить свое отражение при обучении математике прежде всего в разъяснении истинного смысла изучаемых математических понятий.

Это утверждение, кажущееся многим бесспорным, тем не менее часто оспаривается. Некоторые считают, что те, кто интересуется математикой не самой по себе, а лишь математическими методами исследования конкретных задач, т. е. приложениями математики, должны обучаться специальной математике, а не той, которой занимаются сами математики. На самом деле такой специальной математики не существует. Смысл теоремы Пифагора или формулы конечных приращений Лагранжа не зависит от того, кто их использует: инженер или научный работник, прикладник или чистый математик. От будущей специальности студента зависит лишь содержание и объем курса математики, отбор математических понятий и фактов, отбор методов, общность и детализация изложения, подбор примеров, иллюстрирующих применение изучаемых математических понятий и методов к решению прикладных задач.

Можно в принципе учить приложениям математики вместо самой математики, исходя из будущей специализации. Говорить, например, будущим механикам, что производная есть механическая скорость, что интеграл — работа силы, и рассматривать только размерные величины. Конечно, это будет уже не

математика. Возможно, в отдельных случаях (крайне редких, которые даже трудно себе представить) это может оказаться целесообразным. В основном же такой метод обучения плох тем, что человек, изучавший такой специализированный курс, окажется беспомощным, когда он встретится с неизучавшейся им конкретной ситуацией, несмотря на то, что она будет требовать для ее описания или изучения, по существу, того же самого математического аппарата, которому его обучали на конкретных примерах. Он будет беспомощен, поскольку он не был обучен общему подходу, не был приучен к рассмотрению абстрактных математических моделей.

Не случайно в настоящее время наблюдается ярко выраженная упоминавшаяся выше тенденция сближения университетского и высшего технического образования на основе более общего подхода к изучаемым предметам. Современные темпы развития науки и техники таковы, что в силу быстрого изменения конкретных условий работы делается не выгодным готовить узких специалистов. Сейчас все больше потребность в специалистах, которые могут быстро ориентироваться при изменении ситуации, способны правильно оценивать происходящие изменения, приводящие иной раз к качественно совершенно новым явлениям. Эти качества прививаются не узко специальным образованием, а широким общим образованием университетского типа. Уже сейчас во многих передовых высших учебных заведениях, готовящих специалистов по современной науке и технике, математические (а также физические, химические и др.) курсы изучаются по одинаковой программе, не зависящей от будущей специальности студента (например, физической, химической, аэродинамической и т. п.).

Много говорится и о том, что учить математике инженеров надо своими особыми методами, не так, как это делают математики. Этот вопрос мы рассмотрим позже, когда будем обсуждать вопросы методики преподавания.

Все сказанное здесь предполагает, безусловно, что рассматриваемые математические понятия изучаются для их дальнейшего использования при ма-

тематических методах исследования тех или иных вопросов. В случае же, когда знакомятся с математическими понятиями лишь с целью использования их для описания конкретного явления, часто нет нужды разбираться в смысле используемого математического понятия, и можно ограничиться знакомством с ним на интуитивном уровне. На этом вопросе мы также остановимся подробнее ниже, когда будем обсуждать пятое положение.

2. О ЕДИНСТВЕ МАТЕМАТИКИ

положение второе. *Математика едина.*

Это положение означает, что деление математики на чистую и прикладную не может быть строго проведено, что чистая и прикладная математика являются частями единого неразрывного целого, называемого математикой, что эти части невозможно четко отделить одна от другой.

Чтобы подтвердить справедливость этого тезиса, следует прежде всего ответить на вопросы, что такое чистая математика? Что такое прикладная математика? Ответить на них совсем не так просто.

К какой-то степени можно сказать, что под чистой математикой обычно понимается та часть математики, в которой изучаются математические модели сами по себе, без связи с теми реальными явлениями (физическими, химическими, биологическими, экономическими, социальными или какими-либо еще), которые они могут моделировать. При этом в чистой математике исследования (качественные и количественные) проводятся с достаточной общностью, изучаются не отдельные конкретные объекты, а определенные классы объектов, устанавливаются общие методы и алгоритмы решения широкого круга задач.

К прикладной же математике относится та часть математики, в которой изучаются математические модели, моделирующие те или иные реальные явления.

Как уже отмечалось в первой главе, математическое изучение реальных объектов начинается с их математического моделирования, т. е. использования

для их описания некоторых математических моделей, либо уже ранее известных, либо специально построенных для нужного случая. В результате изучения этих моделей часто возникают другие математические модели, которые в свою очередь начинают изучаться, и, таким образом, прикладная математика является мощным источником новых математических моделей. Исследования по прикладной математике нередко приводят к созданию целых новых научных направлений. Именно таким образом во второй половине нашего века оформились в самостоятельные ветви математики теория информации, теория операций, теория случайных процессов, теория оптимального управления, математическая экономика и т. п.

Целью изучения математических моделей в прикладной математике является в конечном итоге исследование соответствующего конкретного реального явления. Поэтому в прикладной математике наряду с изучением общих методов большое место занимает и изучение более частных специальных методов, непосредственно связанных с данным реальным объектом. Конечно, как и при отыскании математической модели, моделирующей рассматриваемое явление, при изучении этой модели не всегда удается обойтись имеющимися в наличии в математике ресурсами. Даже в случае, когда имеются методы изучения нужной математической модели, эти методы могут оказаться не приспособленными для получения требуемых результатов. В этом случае приходится создавать новые специальные методы для решения поставленной задачи, которые также нередко оказываются источником новых общих методов в математике.

Математическое описание конкретных явлений, процессов, событий и т. п. получается на основе тех или иных численных характеристик. Поэтому большую роль в прикладной математике играют численные методы решения задач. В силу этого принято любые численные методы, независимо от того, относятся ли они к решению конкретной задачи или к решению достаточно широкого круга задач (например, численному решению уравнения Лапласа, без рассмотрения конкретного объекта, для которого оно может

являться математической моделью), относить к прикладной математике, а не к чистой. Следует отметить, что численные методы начинают приобретать все большее и большее значение не только для исследований по прикладной математике, но и по чистой, что будет показано в дальнейшем на примере решения проблемы четырех красок.

Отметим еще, что при переходе к численному решению задачи после качественного ее исследования приходится часто снова начинать с математического моделирования изучаемого объекта, так как нередко случается, что математическая модель, которая годилась для качественного изучения объекта, оказывается непригодной для численных расчетов, а затем заниматься разработкой методов для решения возникшей задачи (если, конечно, старые методы не подходят для этой цели). Таким образом, численные методы, как и вся прикладная математика в целом, являются также одним из источников новых математических моделей и новых математических методов.

Как уже отмечалось, многие математические модели и методы исследования, возникшие так или иначе в недрах прикладной математики, начинают изучаться сами по себе или, соответственно, применяться для изучения математических моделей без связи с реальными объектами и тем самым делаются достоянием чистой математики. Наблюдается, безусловно, и обратное явление, при котором методы, созданные в чистой математике, находят свое эффективное применение в прикладной математике и, более того, в непосредственных приложениях математики к решению прикладных задач. Обо всем этом подробно говорилось в первой главе.

Все сказанное уже показывает неразрывную связь чистой и прикладной математики. Однако указанная связь на самом деле более существенна и более глубока — она пронизывает всю сущность методов, применяемых в этих областях.

Проанализируем это обстоятельство более подробно на примере численных методов. Убедительно высказывание С. Л. Соболева об их связи с областями математики; внешне, казалось бы, очень далекими от приложений, которое содержится в предисловии к его

монографии «Введение в теорию кубатурных формул»^{*)}. Он пишет: «...теория вычислений, которую сейчас так же невозможно представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин».

Численное решение какой-то задачи обычно представляет собой завершающий этап ее решения, который осуществляется после определенного качественного ее исследования. Поясним это на примере (приводимом в подобной ситуации А. Н. Тихоновым) решения системы линейных алгебраических уравнений в случае, когда число уравнений равно числу неизвестных. Рассмотрим два вопроса. Первый: когда существует и притом единственное решение такой системы? Второй: если оно существует, как его найти?

Теория дает исчерпывающий ответ на оба вопроса: единственное решение существует тогда и только тогда, когда определитель системы не равен нулю, и для решения в этом случае имеются формулы Крамера.

Казалось бы, что тем самым задача решена и с вычислительной точки зрения. Однако это не так. Прежде всего, с точки зрения численных методов такая постановка вопроса о единственности решения задачи лишена смысла — с определенной точки зрения оно всегда не единственное.

Действительно, на практике коэффициенты системы всегда задаются с определенной степенью точности, и поэтому говорить о ее решении имеет смысл также только с определенной степенью точности: любой набор численных значений неизвестных, удовлетворяющий рассматриваемой системе с указанной степенью точности, является приближенным решением. Таким образом, при численном решении задачи мы встречаемся здесь с существенно новой, более сложной постановкой самой задачи, по существу, задачей решения неравенств, а не уравнений. Далее, оказывается неудобным использовать и формулу Крамера

^{*)} С. Л. Соболев, Введение в теорию кубатурных формул «Наука» М., 1974.

для отыскания значения неизвестных. Если определитель системы будет «близким к нулю» (например, если его нулевое значение будет находиться в пределах допустимой точности задания коэффициентов), то результат вычисления решений по формуле Крамера может оказаться лишенным практического смысла, да и сама постановка задачи требует дальнейшего уточнения.

Впрочем, и в том случае, когда определитель системы не равен нулю в пределах допустимых значений ее коэффициентов, формулы Крамера практически не пригодны для численного решения системы, так как число необходимых для этого операций при таком способе решения очень быстро растет с увеличением числа неизвестных и объем необходимых вычислений делается практически неосуществимым.

На этом примере видно, что с прикладной точки зрения теоретическое решение задачи дало лишь объективную уверенность в существовании решения. Это очень важно, поскольку, будучи уверенным, что решение существует, с большой надеждой на успех можно попытаться найти корректную постановку задачи численного решения уравнений и методов практического нахождения решений. В рассмотренном случае для этой цели оказываются более удобными методы исключения переменных или методы последовательных приближений.

Знание того, что объект, который мы исследуем, действительно существует, дает возможность более правильно выбрать направление поисков. Если бы мы всегда обладали такими знаниями, сколько было бы сэкономлено бесполезных усилий, напрасно затраченного времени и бесплодного труда: достаточно вспомнить бесконечные попытки выполнить трисекцию угла или квадратуру круга с помощью циркуля и линейки (увы, продолжающиеся до сих пор со стороны тех, кто не признает теорем существования и не существования) или попытки сооружения перпетуум мобиле.

Правда, не следует забывать, что даже на ложном пути можно делать полезные и важные открытия. Так, химия возникла из бесплодных попыток алхимиков найти философский камень, а многим открытиям в астрономии мы обязаны астрологам, изучав-

шим небесную твердь для составления гороскопов. Тем не менее бесспорным является тот факт, что правильная постановка задачи существенно помогает целесообразному выбору усилий, направленных на ее исследование и тем самым является важным этапом на пути ее решения.

Итак, вопросы численного решения задач приводят к новым проблемам, к новым постановкам, и оказывается, что теоретические качественные исследования (в частности, теоремы существования) помогают правильно их поставить. На базе фактов «чистой» математики возникают новые, характерные именно для численных методов, задачи: задача о наиболее «выгодном» в том или ином смысле способе численного решения, задача об устойчивости применяемого численного метода и т. п. Сама классическая форма математических теорем «если ..., то ...» приобретает, по словам А. Н. Тихонова, новый аспект. Годятся только те «если», которые можно проверить на практике, которые можно задать с нужной степенью точности. Только такие «если» могут рассматриваться при решении прикладных задач.

Ситуация, при которой численные методы применяются для решения задачи, когда она теоретически достаточно полно исследована, является идеальной и не всегда наблюдается. Нередко численные методы применяются для решения задач, для которых не доказано существование решения и, более того, не обоснована корректность применяемых численных методов. Математические трудности, возникающие при решении таких задач, не вызывают сомнения и, конечно, заслуживают самого внимательного изучения.

Тесная взаимосвязь чистой и прикладной математики проявляется и в том, что современная вычислительная техника дает в руки математиков принципиально новые возможности не только для получения численных решений задач, но и для изучения теоретических проблем.

Замечательным примером использования современных компьютеров в исследованиях по чистой математике является решение знаменитой проблемы четырех красок, поставленной еще в середине прошлого столетия.

Это проблема состоит в следующем. Плоскость разбивается на области (которые называются «странами») с помощью конечного числа гладких кривых без самопересечений. При этом любые две из этих кривых либо не пересекаются, либо пересекаются в концевых точках, и любая концевая точка каждой из указанных кривых является и концевой точкой по крайней мере одной другой кривой. Тогда каждая такая кривая входит в границу в точности двух стран, называемых соседними. Совокупность конечного числа полученных таким образом стран называется «картой».

Проблема состояла в нахождении минимального числа различных цветов, которыми можно раскрасить любую карту таким образом, чтобы каждые две соседние страны были окрашены в разные цвета (такая раскраска карты называется правильной).

В конце XIX века было установлено, что для правильной раскраски любой карты достаточно пяти цветов, пяти различных красок. А можно ли это сделать с помощью лишь четырех красок? Несмотря на многочисленные попытки ответить на этот вопрос (получивший название проблемы четырех красок), до самого последнего времени ответа на него не было получено. В силу простоты своей формулировки эта проблема постоянно привлекала к себе внимание, причем не только профессионалов-математиков, но и многочисленных любителей. И вот недавно было опубликовано сообщение о том, что проблема четырех красок решена американскими математиками К. Аппелем и В. Хакеном*). Именно, ими доказано, что любую карту можно раскрасить правильным образом с помощью четырех различных красок, т. е. так, что каждые две соседние страны будут окрашены в различные цвета. При этом, что очень интересно, решение этой проблемы было получено с существенным использованием современных компьютеров.

На первый взгляд это выглядит неожиданно и даже неправдоподобно: доказательство чисто геометри-

*) K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable. — Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 82, № 5, September 1976, 711—712.

ческой теоремы с помощью вычислений на счетной машине!

Для пояснения заметим прежде всего, что проблеме четырех красок можно придать арифметический характер, что, кстати, было понято еще в XIX веке. Это удобно сделать, сформулировав проблему четырех красок на языке графов, перейдя от заданной карты к так называемому дуальному к ней графу. Для этого в каждой стране выбирается по точке (вершине графа), которые соединяются между собой кривыми (ребрами графа) в том и только том случае, если эти точки были выбраны в соседних странах.

Теперь ясно, что задачу о правильной раскраске карты можно заменить задачей правильной раскраски вершин получившегося плоского графа, т. е. такой раскраски, при которой две вершины графа, принадлежащие одному и тому же ребру, имеют разный цвет.

Начало изучению связей проблемы четырех красок с арифметическими свойствами графа было положено еще в том же XIX веке. Первые численные оценки в этом направлении принадлежат английскому математику П. Хивуду (1890 *). В течение последующих почти ста лет благодаря усилиям многих математиков на этом пути был сделан ряд существенных шагов вперед, но лишь только в 1976 г. было получено положительное решение всей проблемы.

Но как же все-таки с помощью компьютеров было доказано, что для правильной раскраски вершин рассматриваемых плоских графов достаточно четырех красок? Ведь на компьютере можно провести вычисления лишь для конкретного, пусть с очень большим числом ребер и вершин, графа. Как же отсюда сделать заключение о раскраске любого конечного плоского графа? Для этого необходимо делать логические заключения, которые в нужной степени (во всяком случае, в настоящее время) вычислительные машины не умеют делать. Ведь компьютер не всемогущ: он может, например, вычислить сумму данного ряда с нужной нам точностью, но он не умеет исследовать

*) Более подробно об арифметических соотношениях, связанных с проблемой четырех красок, можно прочитать в монографии: А. А. Зыков, Теория конечных графов, «Наука», Новосибирск, 1969, § 48, Проблема четырех красок.

сходимость рядов. Подобные действия остаются пока прерогативой человека.

Конечно, проблема четырех красок и не была решена с помощью одних лишь вычислений. Она была сначала редуцирована к некоторым частным вопросам, имеющим чисто арифметический характер, на которые можно было получить ответ, проведя определенные конкретные числовые расчеты. Эти расчеты потребовали очень большого числа вычислений, которые были бы не под силу человеку, не вооруженному современной вычислительной техникой. Таким образом, нет ничего удивительного, что решение проблемы четырех красок не было получено этим путем в то время, когда не существовало быстродействующих вычислительных машин, которые теперь имеются в распоряжении человека.

На этом примере наглядно видно, как продолжает расти сфера применения компьютеров: с помощью их решается все больше и больше разнообразных задач, возникающих в самых различных областях человеческой деятельности.

Поскольку математика едина, то чистую математику и численные методы следует изучать как единое целое. Это естественно, ибо теоретические качественные и численные методы решения задач тесно переплетены между собой, причем численные методы базируются на тех или иных теоретических изысканиях, излагаются на языке абстрактных математических понятий. В силу всего сказанного численные методы разумно изучать на основе теоретического курса, а не подменять теоретический курс изложением набора отдельных рецептов численного решения задач.

При этом прежде всего надо четко представлять себе, что означает одновременное изучение чистой и прикладной математики, что означает прикладная направленность курса высшей математики, в чем конкретно состоит цель, к которой следует стремиться при обучении математике в высшем техническом учебном заведении.

Обычно для достижения этой цели рекомендуется вставлять в курс математики различные численные методы решения задач, как-то приближенные вы-

числения значений функций, приближенные методы вычисления интегралов, приближенные методы решения систем линейных уравнений, приближенные методы вычисления обратных матриц, собственных значений матриц и так далее и тому подобное. Отмечается, что при этом желательно давать и методы оценки погрешностей полученных результатов — без указания хотя бы грубой оценки отклонения приближенного результата от истинного подобные методы не представляют интереса. Правда, иногда приходится мириться с тем фактом, что нужную погрешность удастся установить не теоретически, а лишь проверить экспериментально в ряде конкретных случаев. Это, конечно, не является доказательством полученной оценки, но иногда оказывается достаточным для поставленных практических целей.

Все эти рекомендации безусловно справедливы: изучение отдельных методов численного решения задач является неотъемлемой частью общего математического образования и безусловно полезно, причем не только для тех, кто будет заниматься приложениями математики к решению конкретных задач, но и для тех, кто будет разрабатывать теоретические проблемы в той или иной области человеческого знания, в том числе и в чистой математике. Но было бы заблуждением считать, что включение изучения решений отдельных задач численными методами полностью решает вопрос о прикладной направленности математического обучения.

Решение этого вопроса в действительности гораздо сложнее.

Например, если представить себе деятельность геодезиста, связанную с измерениями на местности, то ему при проведении расчетов вряд ли поможет знание методов, с помощью которых были составлены таблицы, применяемые им в повседневной работе, или знание тех принципов, на которых основана реализация программ для ЭВМ, используемых им для проведения нужных вычислений. Для него гораздо важнее умение поставить математическую задачу, провести ее необходимый предварительный качественный анализ, подготовить ее для численного

решения, а сам процесс этого решения для него не представляет интереса.

Умение нужным образом применять математические методы для решения практических задач с тем, чтобы получать требуемые результаты, и является основным критерием для оценки правильной постановки обучения, правильной ориентации будущих прикладных математиков. Для этого недостаточно (хотя, безусловно, и необходимо) знание одних численных методов. Нужно более широкое знакомство с математикой в целом, так как большей частью все конкретные задачи решаются с помощью и на основе имеющихся теорий, в том числе и математических.

Для достижения указанной цели отбор изучаемого материала играет первостепенную роль. Было бы неправильным ограничиваться в основном изучением методов, близких к численным методам или по своему духу, или по непосредственным связям. Здесь имеются в виду, например, методы выделения главной части функции в окрестности точки и методы аппроксимации функций в целом, применение этих методов для решения различных задач, касающихся как качественных исследований, так и имеющих оценочный характер. Безусловно, изучение подобных методов необходимо, очень полезно и потому должно составлять неотъемлемую часть математического образования. Пренебрежение этими, в определенном смысле конкретными, разделами и преждевременное увлечение общими теориями на первых ступенях математического образования наносят последнему существенный вред.

Однако переход к изложению общих точек зрения на изучаемые объекты на следующих этапах обучения безусловно необходим, ибо он дает современному специалисту необходимую широту взгляда, необходимую математическую культуру. Следует только помнить, что общие теории особенно полезны тогда, когда имеются частные примеры для их применения, когда эти примеры сами по себе являются для учащегося естественными, хорошо знакомыми и освоенными.

Из всего сказанного следует, что практическая направленность математического обучения прежде

всего имеет своей основой достаточное богатство и разнообразие изучаемого материала.

В связи с этим необходимо еще раз напомнить об имеющейся здесь опасности излагать материал «в полном объеме». Следует всегда помнить, что дело не в том, чтобы сообщить учащемуся десятки теорем, а прежде всего в том, чтобы учащийся активно овладел основными понятиями. В основе обучения должно лежать положение, что «лучше знать меньше, да хорошо», нежели иметь поверхностное знакомство со многими вопросами. На базе основательных знаний воспитывается математическая культура, необходимая для правильного использования математического аппарата. Надо всегда тщательно отбирать необходимый для студента минимум знаний, и только после его освоения можно допускать дальнейшее увеличение изучаемого материала. Имея прочную базу знаний, на ее основе легко можно продолжить дальнейшее образование в нужном направлении. В этом случае качество легко переходит в количество.

Очень важными являются философско-идеологические основы курса высшей математики. Именно с самого начала в этом курсе при изучении теоретических основ следует идеологически готовить студента к численному решению задач, как к следующей, в известном смысле более сложной, ступени изучения математических моделей, и, вместе с тем, прививать ему практические навыки обращения с современной вычислительной техникой: для современного студента использование в случае необходимости ЭВМ должно быть столь же естественным и простым, как для школьника обращение к таблице значений логарифмов или синусов. Как же всего этого достичь?

Прежде всего с самого начала обучения математике в высшем учебном заведении целесообразно обращать внимание на характер доказательств рассматриваемых в курсе теорем, отмечая, когда он является алгоритмическим, а когда нет. Например, полезно проанализировать тот факт, что доказательство теоремы о существовании максимума и минимума у непрерывной на отрезке функции, проводимое с помощью принципа компактности, не дает возможности фактически найти точки экстремума.

С другой стороны, полезно отметить, что доказательство того, что непрерывная на отрезке функция, принимающая на концах отрезка значения разного знака, обращается в некоторой точке в нуль, проводимое с помощью последовательного деления отрезка пополам, имеет алгоритмический характер, поскольку позволяет найти указанную точку с любой степенью точности.

Небезынтересно обратить внимание на то, что не является алгоритмическим и доказательство теоремы Вейерштрасса о существовании, например, наибольшего значения у непрерывной на отрезке функции, основанное на том же последовательном делении отрезков пополам и выборе того из двух получившихся отрезков, на котором значение верхней грани функции не меньше, чем на другом. Действительно, этот метод выбора отрезков не эффективен, не алгоритмичен: например, критерий, состоящий в том, что из двух отрезков выбирается такой, что, каково бы ни было значение функции, принимающееся в некоторой точке другого отрезка, и каково бы ни было число, меньше этого значения, на выбранном отрезке найдется точка, в которой значение функции больше указанного числа, нельзя «фактически» проверить, в отличие от критерия, по которому производился выбор отрезков при доказательстве теоремы Коши об обращении в нуль непрерывной функции, принимающей на концах отрезка значения разного знака. В последнем случае выбор отрезка на каждом шаге производится на основании сравнений знаков значений функции только в двух точках — на концах отрезка, получившегося на предыдущем шаге.

Полезно также заметить, что не всякий алгоритмический процесс на самом деле целесообразно использовать на практике (например, для численного решения систем линейных уравнений обычно бывает неразумно использовать формулы Крамера), что большое значение для использования алгоритма при численных расчетах имеет число операций, которые надо произвести при его применении, и объем памяти, которую надо при этом использовать.

Весьма целесообразно параллельно с рассмотрением основных понятий математического анализа

обучать сразу студентов численному решению задач, иллюстрирующих изучаемые понятия и их свойства. Благодатной темой для таких задач является, например, численное решение задач на отыскание экстремума функций как с помощью теорем о свойствах производных в точках экстремума, так и непосредственным методом поиска (перебора). Полезно и сравнить порядок числа операций при нахождении решения задачи этими методами.

Иногда приходится слышать упреки, что в курсах математики увлекаются изучением внутренних математических понятий, ненужных для приложений. Обычно эти упреки касаются лишь стиля изложения, а не содержания курса по существу. Чтобы не давать повода для подобных упреков и для того, чтобы сразу правильно ориентировать студента при изучении математики (особенно при обучении будущих специалистов по приложениям математики), целесообразно с самого начала изучения математики в высших учебных заведениях указывать на связь с численными методами таких понятий, как, например, вложение отрезков, предел последовательности, запись действительных чисел с помощью бесконечных десятичных дробей, ε — δ определения непрерывности функции (см. далее п. 5) и т. п. Такое методическое построение математических курсов обеспечивает неразрывную связь теоретических (качественных и аналитических) методов и численных, не противопоставляя одни другим.

3. О ВНУТРЕННЕЙ ЛОГИКЕ МАТЕМАТИКИ

ПОЛОЖЕНИЕ ТРЕТЬЕ. *Содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности учащегося, без учета внутренней логики самой математики.*

Всякая наука имеет свою внутреннюю структуру и свою внутреннюю логику, имеет внутренние связующие звенья, не всегда имеющие непосредственный выход за пределы самой науки, но играющие принципиальную роль внутри нее и являющиеся необходимыми для ее понимания, усвоения и для умения

правильно использовать ее в приложениях. Это бесспорная истина, о которой часто забывают, когда начинают говорить о конкретном содержании какой-либо дисциплины.

В качестве конкретного примера внутреннего связующего звена можно указать теорему Коши о среднем значении двух функций — она представляет интерес не столько сама по себе, сколько потому, что с ее помощью легко доказывается много полезных утверждений; оценка остаточного члена в формуле Тейлора; вывод правила Лопиталя для вычисления предела отношения функций.

Весьма красноречивым подтверждением сформулированного положения является высказывание А. Н. Крылова *): «При изучении анализа и механики и подобных отделов из аналитической геометрии и высшей алгебры должны соблюдаться определенная постепенность и полнота; многое может казаться излишним и непосредственных приложений не имеющим, но оно нужно для ясного усвоения дальнейшего и не может быть пропущено подобно скучной главе романа».

Итак, критерий полезности для будущей специальности учащегося при составлении программы какой-либо математической дисциплины должен, безусловно, присутствовать, но ограничиться только им было бы большой ошибкой.

4. О ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

ПОЛОЖЕНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ. *Целью при обучении математике является приобретение учащимся определенного круга знаний, умения использовать изученные математические методы, развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.*

Современный научный работник или инженер должен в достаточной степени хорошо владеть как классическими, так и современными методами иссле-

*) А. Н. Крылов, Воспоминания и очерки, Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 612.

дования, которые могут применяться в его области. Для того чтобы иметь возможности с успехом использовать математические методы при изучении того или иного вопроса, нужно, конечно, иметь прежде всего необходимые для этого знания, уметь правильно обращаться с математическим аппаратом, знать границы допустимого использования рассматриваемой математической модели. Это утверждение кажется очевидным, однако то, что происходит в реальной жизни, далеко не всегда согласуется с ним. Поясню это на одном анекдотическом, но действительно происшедшем случае.

Аспирант, пишущий диссертацию на экономическую тему, пришел однажды к одному моему ученику и сказал, что он подсчитывает процент прироста свиней в одном совхозе, однако математика дает результаты, противоречащие здравому смыслу.

— Дело,— сказал он,— обстоит следующим образом. Сначала свиней в совхозе не было, а через год их стало 50. Для подсчета процента их прироста я поделил 50 на нуль и помножил на 100, сократив нули, получил $\frac{50 \cdot 100}{0} = 500\%$. Однако по здравому

смыслу, если бы сначала была одна свинья, а через год их бы стало снова 50, то процент прироста должен был бы быть меньше, однако тот же подсчет дает $\frac{50 \cdot 100}{1} = 5000\%$. Что-то в вашей математике не

в порядке,— сказал аспирант (интересно, конечно, как он им стал?).

Это, конечно, уникальный анекдотический случай, но, к сожалению, использование того или иного математического аппарата вне возможных границ его применения встречается и на более высоком уровне. Я помню случай с одной докторской диссертацией по механике, где для «больших» скоростей использовалась формула, выведенная лишь для достаточно малых, что привело, естественно, к неверным выводам.

Перечисленными выше задачами не исчерпываются, однако, цели, которые ставятся при обучении студентов математике. Дело в том, что для того, что-

бы иметь возможность разумно и успешно применять математические методы при изучении того или иного вопроса, нужно, конечно, как это отмечалось выше, иметь необходимые знания, уметь правильно обращаться с математикой, в частности, знать границы допустимого использования применяемого математического аппарата. Этого, однако, недостаточно для умения решать задачи и изучать различные объекты математическими методами, да и вообще для математического творчества, т. е. для познания объективно существующих математических истин.

Для правильной постановки задачи, для оценки ее данных, для выделения существенных из них и для выбора способа ее решения необходимо обладать еще математической интуицией, фантазией и чувством гармонии, позволяющими предвидеть нужный результат прежде, чем он будет получен. Однако интуитивно почувствовать ожидаемый результат и наметить путь исследований с помощью правдоподобных рассуждений — это далеко не все. Интуитивное чувство гармонии является в математике лишь первой, хотя и весьма важной ступенью; интуитивные соображения и правдоподобные рассуждения отдаются на суд холодного рассудка для их изучения, доказательства или опровержения. Следует заметить, что справедливость рассматриваемого факта доказывается не проверкой его на ряде примеров, не проведением ряда экспериментов, что не имеет для математики доказательной силы, а чисто логическим путем, по законам формальной логики. Конечно, и эксперименты и примеры также играют большую роль в математических исследованиях: они могут или дать иллюстрацию утверждения, или опровергнуть его, или натолкнуть на какую-либо (в том числе и новую) идею. За последние годы в связи с быстрым развитием вычислительной техники особенно возросло значение математического эксперимента в прикладных исследованиях: здесь открылись качественно совершенно новые возможности и перспективы.

Правильно и удачно поставленный на компьютере «численный эксперимент» может привести к воз-

никновению плодотворных гипотез, изучение которых позволит понять сущность изучаемого явления и в конце концов создать нужную теорию.

При математическом доказательстве гипотезы, при математическом решении задачи правильный выбор аппарата и метода — залог успеха и, более того, часто причина того, что в результате будет получено больше полезной информации об изучаемом предмете, чем заранее предполагалось. Это связано с тем, что математический аппарат таит в себе много скрытой информации и скрытого богатства, накапливавшихся в нем в течение веков, благодаря чему формулы могут оказаться «умнее» применяющего их и дать больше, чем от них ожидалось (вспомним, например, теоретическое открытие позитрона Дираком).

Безусловно, эта схема весьма идеализирована.

Использование знаний, математического аппарата, интуиции, чувства гармонии, фантазии, логики, эксперимента происходит не последовательно по этапам — это все время взаимодействует между собой в течение всего процесса. Далее, далеко не всегда удастся довести проводимые исследования до желаемого конца, но было бы, например, большим заблуждением думать, что для математики имеют значения только доказанные утверждения, только исследования, доведенные в известном смысле до логического завершения.

Можно привести много примеров математических теорий и положений, которые, будучи сформулированы лишь в виде гипотез, тем не менее оказывали или оказывают существенное влияние на развитие математики или ее приложений.

В результате приобретенных в процессе обучения математических знаний и интуиции у учащегося появляется то, что обычно называется математической культурой. Ее уровень после завершения обучения в высшем учебном заведении должен обеспечить умение разбираться в математических методах, необходимых для работы по специальности, но не изучавшихся в вузе, умение читать нужную для этого литературу, умение самостоятельно продолжать свое математическое образование.

Анализу процесса математического творчества и использования математических методов при решении задач посвящено много интересных исследований *).

5. О МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Когда определена цель обучения, возникает естественный вопрос: а как ее достичь? Какова должна быть методика преподавания?

Этот вопрос как никакой другой является объектом критики как внутренней со стороны самих математиков, так и внешней со стороны специалистов, в той или иной мере использующих математические методы. Весьма часто даже внутри одной кафедры математики бывает очень трудно договориться об едином методе изложения того или иного материала (впрочем, это далеко не всегда и нужно).

Сложность ситуации и причина трудности ее устранения связана с тем, что, во всяком случае в настоящее время, методика преподавания математики еще не достигла научного уровня и основывается лишь на несистематизированном опыте отдельных преподавателей (к сожалению, многие ограничиваются лишь личным опытом) и на вере их в собственную правоту и непогрешимость. Во всех методических дискуссиях особо остро проявляется непримиримость и нетерпимость к другим точкам зрения, как это всегда бывает там, где в основе лежит догма и вера. Много несерьезных вещей говорилось и гово-

*) Отметим следующую литературу по этому вопросу:

П. С. Александров, Мир ученого, «Наука и жизнь», № 8, 1974, стр. 2—9.

А. Н. Колмогоров, О профессии математика, «Советская наука», М., 1954.

Ж. Адамар, Исследование психологии процесса изобретения в области математики, «Сов. радио», М., 1970 (там же приложение: А. Пуанкаре, Математическое творчество).

Д. Пойя, Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, М., 1957.

Д. Пойя, Математическое открытие. «Наука», М., 1970.

Дж. Литтлвуд, Математическая смесь, «Наука», М., 1965.

А. Г. Постников, Культура занятий математикой, «Знание», М., 1975.

рится солидными и серьезными людьми по поводу методов обучения математике. Не будем приводить соответствующих цитат, дабы не обидеть их авторов, а постараемся сформулировать (на интуитивном уровне) некоторые основные принципы методики преподавания математики.

положение пятое. *Преподавание математики должно быть по возможности простым, ясным, естественным и базироваться на уровне разумной строгости.*

Поскольку этот тезис каждый может понимать со своей точки зрения и вкладывать в него тот смысл, который ему хочется, то постараемся пояснить несколько детальнее, что здесь имеет в виду автор.

Тезис о простоте изложения означает прежде всего простоту построения курса в целом, такую его структуру, при которой делаются акценты на главные принципиальные идеи, и большая часть времени и внимания уделяется основным методам и фактам, ради которых читается данный курс. Вспомогательное и второстепенное должно явным образом занимать подчиненную роль и не требовать усилия для своего усвоения. Так, например, хотя теория вещественного числа является базисом математического анализа, в технических высших учебных заведениях нецелесообразно уделять ей много времени, так как она в этом случае является вспомогательной, а не основной частью курса математики.

Далее, при изложении какого-либо вопроса при прочих равных условиях следует отдавать предпочтение тому из способов, который проще. Конечно, появляются сразу разные «но». Поясним это на примерах. Более простым разумно считать то доказательство, которое естественно, а не искусственно. Безусловно, эти понятия относительны. По остроумному замечанию Полия и Сеге*), способ, примененный первый раз, является искусственным приемом, он же, примененный второй раз, делается методом. Добавим еще, что, как правило, следует отдавать предпочтение прямым доказательствам, а не от

*) Г. Полия и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, Гостехиздат, М., 1956.

противного, и рассуждениям, основанным на непосредственном использовании определений и известных теорем, без привлечения дополнительных конструкций. При этом разбор по существу имеющейся ситуации, анализ отдельных случаев, которые могут встретиться, хотя и бывает громоздок, но более доходчив, нагляден, легче усваивается и позволяет лучше осознать суть дела, хотя и не всегда так изыщен, как искусственный прием. Наконец, предпочтительнее выбирать те методы и те доказательства, которые допускают дальнейшее обобщение.

Самыми распространенными упреками в адрес методики преподавания математики является обвинение педагогов-математиков в пренебрежении интуицией, в преподавании математики в виде формальной цепочки логических умозаключений и доказательств, проводимой с никому, кроме самих математиков, не нужной логической строгостью, приводящей лишь к торжеству «над здравым смыслом», к схоластике. Иногда высказывается прямое сомнение в необходимости проведения доказательств*) при обучении математике тех, кто интересуется лишь ее применениями. Утверждается, что доказательства математики проводят для собственного удовольствия, и со ссылкой на авторитеты говорится, что строгие логические доказательства еще никогда и ни в чем никого не убеждали, что достаточно разъяснить студенту то или иное математическое положение на интуитивном уровне, чтобы он смог его успешно применять. Любопытно отметить, что все эти высказывания делаются обычно по поводу курса математики в высшей школе, а то, что в школьном курсе элементарной математики присутствуют леммы, теоремы и их доказательства, не вызывает таких возражений.

Другое соображение, высказываемое противниками доказательств, состоит в том, что при практическом использовании математики далеко не всегда приходится пользоваться доказанными математическими фактами. Так, например, до сих пор теоретически задача Ньютона о трех телах полностью не

*) М. Клайн, Логика против педагогики, Сборник научно-методических статей по математике, вып. 3, «Высшая школа», М., 1973.

изучена, а космические аппараты успешно летают. Говорится, что на вычислительных машинах решаются с нужной степенью точности уравнения, когда не только не удается оценить скорость сходимости применяемого вычислительного процесса, но даже и просто доказать его сходимость. Указывается на успех использования при численных решениях задач интуитивных соображений и эвристических методов.

Все это, конечно, справедливо. Безусловно, интуитивные подходы и эвристические методы целесообразны и всегда оправданы, когда они приводят к результатам, хорошо согласующимся с реальными явлениями и удовлетворяющим практическим потребностям. Изучение и развитие эвристических методов является очень важной и нужной задачей. Однако надо отдавать себе отчет в том, что использование математических методов при отсутствии четкой математической модели и ее теории обычно является вынужденной необходимостью, а не тем, что хотелось бы и что нередко нужно было бы иметь. С таким же успехом можно привести примеры задач, при решении которых численные и эвристические методы не дают нужного результата; попытки их применения порождают расходящиеся процессы, а отсутствие теории не позволяет выяснить причину этого. В результате остается даже неизвестным, как подступиться к этим задачам.

Высказывается также соображение, что поскольку сами математики отличаются друг от друга не умением проводить более или менее строго доказательства, а своей интуицией (точнее, в частности, и своей интуицией), то это также говорит о несущественности строгости доказательств, о важности интуиции и достаточности правдоподобных рассуждений (не будем придирается к логической стройности подобных умозаключений и ограничимся их восприятием на интуитивном уровне).

Пожалуй, наиболее важный и принципиальный довод противников строгих логических доказательств состоит в том, что никакое открытие в той же математике не делается строгим логическим путем, а прежде всего основывается на интуитивных соображениях, правдоподобных рассуждениях, фантазии

и предвидении конечного результата из каких-либо общих или конкретных соображений.

Все это верно. Математики и сами прекрасно это понимают. Однако одним из характерных приемов критики (присущей, конечно, не только критике, направленной на существующее преподавание математики) является обвинение кого-либо в трех грехах, которых на самом деле у него нет, но которые удобно, легко и приятно критиковать. Это и относится, например, к обвинению математиков в пренебрежении интуицией. Думаю, что никто и никогда из математиков не оспаривал важности и необходимости развития математической интуиции, без которой нельзя не только сделать научного открытия, но и нельзя, как правило, решить новую практическую задачу. Никто из математиков не станет протестовать против возможности и необходимости использования физической интуиции при математическом решении задачи, особенно в случае надежности математической модели соответствующего явления.

Математик логически обосновывает свои утверждения вовсе не из-за увлеченностью строгостью рассуждений, не для того, чтобы противопоставить математику другим наукам и подчеркнуть, что только в математике мы имеем дело с логически обоснованными утверждениями, а в силу объективной необходимости, в силу того, что логические рассуждения (которые по своей природе, если они правильные, являются и строгими) представляют собой метод математики, без них математика немыслима.

Как это ни странно, но многие не понимают объективной необходимости логических рассуждений, упрекая математиков в том, что они учат не той математике, которая нужна. На это можно лишь ответить, что математика не сводится к логике, но без логики нет математики. Поэтому не вполне прав М. Клайн, говоря: «Математика — это женщина, а логика — ее одежда» (см. сноску на стр. 68), поскольку математика немыслима без логики. Одеждой математики скорее можно назвать внешнюю форму записи математических фактов, представляющую собой удручающе однообразную (особенно для неспе-

циалиста) цепочку логических символов. Эти символы действительно являются лишь внешним отражением сущности математики, подобно тому как нотная грамота — отражением музыки.

Почти все математики (точнее, это означает — все, за исключением конечного числа их) хорошо понимают, что чрезмерно формальное изложение математических курсов в виде безупречно логически стройной цепочки определений, лемм и теорем, без рассмотрений примеров и без приложений к решению задач может быть уподоблено (во всяком случае для будущих специалистов по приложениям математики) изучению музыки с помощью лишь одной нотной грамоты без воспроизведения музыкального звучания. Безусловно, при обучении математике надо обучать умению интуитивно предвидеть окончательный результат прежде, чем он будет получен, и умению проводить правдоподобные и эвристические рассуждения, и развивать математическую интуицию.

Поэтому важность развития математической интуиции на основе приобретаемых математических знаний в процессе обучения математики была специально подчеркнута при определении целей преподавания математики в четвертом положении.

Конечно, бывают случаи, когда при использовании математических методов не нужны правдоподобные рассуждения и сразу можно использовать «строгие» математические методы. Такая ситуация может иметь место, когда для рассматриваемой задачи имеется вполне определенный четко разработанный алгоритм и по каким-либо причинам известно, что именно его следует применить в данном случае. Впрочем, не лишне заметить, что эти «какие-либо» причины нередко и оказываются основанными на правдоподобных рассуждениях.

Все сказанное несколько не противоречит необходимости проведения логических доказательств. Логические доказательства помогают выработать у студента необходимые для использования математического аппарата навыки, помогают овладеть математическими методами, приобрести нужную для их грамотного применения математическую культуру,

составной частью которой является логическое мышление. Часто доказательство помогает лучше осознать границы применимости рассматриваемого математического аппарата и тем самым предостеречь от возможных ошибок в его использовании.

Не следует забывать о том, что интуиция иногда и обманывает. Хорошо известен исторический пример с Лейбницем*), долго обсуждавшим вопрос о том, не является ли производная произведения функций равной произведению их производных. Вряд ли здесь найдется лучший способ выяснения истины, чем проведение прямого доказательства соответствующей формулы. Был период, когда считалось интуитивно очевидным, что всякая непрерывная функция является дифференцируемой. Выяснение действительной ситуации является не вопросом формальной строгости, а существом дела. Непрерывные не дифференцируемые функции не измышление математиков, ибо, например, скачкообразные изменения скорости могут иметь место и в математических моделях реальных физических явлений. Впрочем, не нужно забывать и о том, что все зависит от точного смысла понятия производной, ибо, если производную понимать как производную обобщенной функции, то все непрерывные функции действительно дифференцируемы.

Проиллюстрируем полезность и необходимость строгого доказательства еще на одном историческом примере. Коши, рассуждая недостаточно четко, делал вывод, что всякий сходящийся ряд непрерывных функций имеет своей суммой непрерывную функцию. После приведения примера, опровергающего это утверждение, наиболее простым способом получения правильного утверждения является превращение правдоподобного рассуждения Коши в доказательство с помощью введения понятия равномерной сходимости ряда (любопытно заметить, что впервые понятие равномерной сходимости было введено анг-

*) Н. Бурбаки. Функции действительного переменного. Элементарная теория, «Наука», М., 1965, стр. 190.

Н Б у р б а к и, Очерки по истории математики, ИЛ, М., 1963, стр. 200.

лийским физиком Дж. Стоксом и независимо от него немецким математиком Зейделем в 1847—1848 гг. *).

Рассмотренные примеры хорошо показывают, что проведение доказательства позволяет убедиться в справедливости сделанного утверждения, показывают его закономерность и естественность. Этим свойством обладают все доказательства, причем тем больше, чем более они естественны, чем менее они искусственны. Однако, как это отмечалось выше, следует отдавать предпочтение прямым доказательствам перед доказательствами от противного, хотя логически они и равноправны, просто потому, что при решении практических реальных задач приходится исходить из того, что есть, а не из того, чего нет. Отметим, кстати, что все алгоритмические доказательства являются прямыми.

Другое достоинство доказательств состоит в том, что они помогают раскрыть смысл вводимых математических понятий, помогают овладеть ими и, следовательно, правильно использовать их на практике. Так, например, доказательство того, что во внутренней точке экстремума производная, если она существует, равна нулю, основанное на аналитическом определении производной, помогает раскрыть его смысл, освоить его. В свою очередь доказательство теоремы Ролля, основанное на указанном свойстве точек экстремума, помогает лучше понять последнее и запомнить его и т. д. и т. п.

Из сказанного видно, что доказательства, помогая усвоить логическую структуру математического курса, установить связь между отдельными его частями, существенно облегчают его запоминание и усвоение по сравнению с рецептурным методом изложения. Важно, что при проведении доказательств демонстрируется применение математических идей, понятий, математического аппарата в действии, т. е. происходит обучение учащегося самому важному: умению проводить решение задачи математическими методами. Не следует забывать и о том, что логическое обрамление является неотъемлемой частью процесса решения

*) Н. Бурбаки, Очерки по истории математики, ИЛ, М., 1963, стр. 208, 215.

любой задачи с применением математики, в том числе и при использовании готовых алгоритмов.

Безусловно, бывают такие ситуации, когда при приобретении учащимся достаточно высокой математической культуры по тем или иным причинам оказывается более целесообразно ознакомить его с некоторым утверждением, не приводя его доказательство, а лишь разъяснив в определенной степени его смысл. Однако на первом этапе обучения это явно не желательно и не целесообразно.

Подчеркнем, что доказательство математического утверждения на основании каких-то посылок неотъемлемо содержит логический анализ связи исходных данных с рассматриваемым утверждением. Эта мысль подчеркнута Ж. Дьедонне в предисловии к его «Линейной алгебре и элементарной геометрии»: «Большое воспитательное значение для рассудка имеет поиск экономии средств и приспособление гипотез к заключениям» *). Эта сторона математики тесно связана с косвенной пользой, которую приносит ее изучение, совершенствуя общую культуру мышления, о чем говорилось в конце первой главы.

Само собой разумеется, что, прибегая к «строгим доказательствам», надо держаться в разумных пределах, не стремясь всегда сводить все к аксиомам, помнить, что понятие строгости является относительным и историческим. Уровень строгости при изложении математических методов определяется потребностью практики в широком смысле этого слова.

Так, например, при определении непрерывной функции, как такой функции, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги или мела от доски (это дает определенную информацию о рассматриваемом объекте), тот факт, что всякая непрерывная функция, принимающая значения разного знака на концах отрезка, в некоторой его точке обращается в нуль, по-видимому, не следует доказывать, считая, что он непосредственно наглядным образом вытекает из определения. При классическом же определении непрерывной функции тот же факт следует

*) Ж. Дьедонне, Линейная алгебра и элементарная геометрия, «Наука», М., 1972, стр. 18.

доказать на «общепринятом» уровне строгости. Кавычки здесь поставлены потому, что, если к допустимым логическим рассуждениям подойти в определенном смысле более строго, а точнее, с позиций конструктивной математики, то для высказанного утверждения можно будет построить противоречащий пример, т. е. построить функцию, непрерывную на отрезке, принимающую на его концах значения разного знака и ни в одной его точке не обращающуюся в нуль. Этот неожиданный результат объясняется тем, что, образно говоря, в конструктивной математике другие «правила игры», чем в классической.

К сожалению, и это, по-видимому, неизбежно, даже внутри одного математического курса отдельные его части приходится излагать на разном уровне строгости. Так, в начале анализа понятие производной, признаки экстремума, свойства непрерывных и дифференцируемых функций вполне можно излагать на уровне «классической строгости», заботиться о том, чтобы в формулировках доказываемых теорем не было лишних предпосылок, и подтверждать это соответствующим анализом. При переходе к функциям многих переменных ситуация резко меняется. Ввиду сложности рассматриваемых объектов здесь не всегда разумно доказывать теоремы при минимальных предположениях — загромождение предпосылок часто существенно упрощает доказательство и проясняет суть дела. Например, теорему о неявных функциях значительно проще, а потому и целесообразнее, доказывать для непрерывно дифференцируемых, а не просто дифференцируемых функций.

Меняется, обычно при рассмотрении функций многих переменных, и уровень строгости проводимых рассуждений. Для функций одной переменной доказательства теорем общего курса анализа можно без труда проводить по четким логическим схемам, прибегая к наглядным представлениям лишь для их иллюстрации. Для функций же многих переменных наглядные представления являются иногда основой рассмотрения, как, например, понятие ориентации поверхности по «правилу штопора» при изучении теории поля (логически строгое изложение этого вопроса потребовало бы слишком много времени

и усилий, неоправданных в высшем техническом или другом подобном высшем учебном заведении). Это неизбежно, не следует этого бояться и стремиться к обязательному построению всего курса математики на уровне логической строгости изложения начал анализа. Хорошо и то, что эти начала так удастся изложить, а чтобы удержаться на таком уровне в течение всего курса, прежде всего не хватит часов, отводимых на математику, да, кроме того, это часто и нецелесообразно даже при наличии времени.

При построении математического курса нельзя ограничиться заботой только о его внутренней логической стройности, сведя его, пусть даже к безупречной, формальной логической последовательности определений, лемм, теорем и их доказательств. Необходимо уделять достаточно большое внимание разъяснению понятий, в том числе и на интуитивном уровне, рассмотрению иллюстрирующих примеров, демонстрации применения изучаемых методов на решении частных задач и всевозможным «лирическим отступлениям». Надо всегда помнить, что когда мы учим математике студентов, которые в силу своей природной склонности избрали своей будущей специальностью не математику, то следует особенно тщательно отбирать лишь тот материал, который необходим для них, который им доступен и который может быть ими усвоен за тот промежуток времени, который на это отводится, наконец, тот, на котором можно воспитать у них нужную им математическую культуру, о коей говорилось при обсуждении целей преподавания математики (см. п. 4 этой главы).

Несмотря на кажущуюся очевидность сказанного выше в защиту целесообразности использования при изучении математики строгих логических рассуждений, в частности, четких логических доказательств формулируемых утверждений, далеко не все согласны с этим. Существует мнение, что для потребителей математики не является необходимым знакомство со строгими определениями математических понятий, что целесообразно вводить их «наглядно», ограничиваясь лишь интуитивным уровнем. Это совсем не простой вопрос. Когда мы хотим познакомить ребенка с понятием «стул», то, конечно, самое разумное не давать

ему логического определения этого понятия, а просто показать стул. Однако когда заказывается изготовление стула мастеру, то для того, чтобы изготовленный стул совпал с желанием заказчика, приходится составлять достаточно детальное его описание. Подобно этому обстоит дело и с математическими понятиями. В тех вопросах, где математический язык применяется лишь для описания явления (как, например, термин график при графическом изображении работы сердца на кардиограмме), о математических понятиях можно говорить любую чепуху либо ничего не говорить — это не имеет никакого значения и не может повлиять на дальнейшее. Так, врач-кардиолог, использующий кардиограмму для изучения сердца больного, не имеет нужды знакомиться с понятием функции, ибо знакомство с этим понятием не даст ему больше полезной информации о состоянии сердца пациента.

В тех же случаях, когда употребленное абстрактное понятие приходится использовать по существу, наглядное представление о нем может лишь предворить его четкое определение, но не заменить его.

Другой пример. Если дельта-функция Дирака употребляется лишь для описания некоторого физического понятия, скажем, мгновенной силы, то ничего не случится, если сказать, что дельта-функция — это обычная функция, равная нулю во всех точках, кроме одной, где она равна бесконечности, причем интеграл от этой функции равен единице. Все это, конечно, непонятно с точки зрения математики, в частности здесь неприменимо понятие обычного интеграла, определяемого как предел интегральных сумм, или более общего понятия несобственного интеграла. Однако поскольку здесь дельта-функция является просто «математическим описанием» мгновенной силы, то все сказанные слова, несмотря на отсутствие в них математического смысла, не приводят к недоразумению. Если же с понятием дельта-функции придется работать, применять его в теоретических исследованиях, то подобное представление о дельте-функции может привести к появлению ошибок, и потому целесообразнее добавить пару дополнительных фраз, проясняющих суть дела (которые физики, как это не странно,

очень не любят говорить). Например, сказать, что мгновенная сила — это идеализация реального явления, что в действительности действует некоторая дельта-эпсилон сила в течение промежутка времени длительности эпсилон. Если эта сила сообщает то же количество движения (для определенности равное единице), что и рассматриваемая «мгновенная» сила, то по определению полагается, что интеграл от мгновенной силы, т. е. от дельта-функции, равен пределу обычных интегралов от «размазанных» дельта-эпсилон сил, когда эпсилон стремится к нулю. После этого все делается ясным и понятным. Конечно, в зависимости от дальнейшего использования понятия дельта-функции может потребоваться и более полное описание ее свойств и связей с другими математическими объектами вплоть до современной теории обобщенных функций.

Там, где математика применяется как метод исследования, интуитивных представлений об основных понятиях обычно оказывается недостаточно. Более того, и это очень важно, использование математических понятий без точного понимания их смысла, а, как говорят, на интуитивном уровне, может привести к прямым ошибкам. Об этом уже говорилось при обсуждении четвертого положения. Следует всегда помнить, что когда математика применяется в качестве аппарата, в качестве инструмента исследования, то для успешного проведения последнего необходимо, как правило, четкое представление об используемых при этом математических понятиях. Важно подчеркнуть, что это представление не зависит от «места действия» — оно одно и то же как в университете, так и в техническом высшем учебном заведении. Автору приходилось слышать, что во втузах более просто излагают формулу конечных приращений Лагранжа, используя соответствующий чертеж, а в университете поступают хуже, проводя все рассуждения чисто аналитически. Такое противопоставление неправильно. Тот, кто изучает формулу Лагранжа, должен, конечно, понимать как смысл ее аналитического выражения, так и геометрическую интерпретацию последнего. Понимать одно и не понимать другое значит не понимать вовсе.

Только при наличии указанных четких представлений об используемых математических понятиях может быть объективная уверенность в правильности сделанных выводов. Для того чтобы применять математику как метод исследования, весьма важно осознать и хорошо освоить сущность и взаимосвязь ее основных идей и понятий. В этом случае можно смело использовать правдоподобные рассуждения, ибо они надежны только, если базируются на истинном знании. Строить же все обучение математики на правдоподобных рассуждениях заведомо недопустимо, поскольку в этом случае невозможно четко (а значит, правильно) очертить границы допустимого применения рассматриваемого математического аппарата.

Свободное владение математическими методами, знания и интуиция приобретаются, накапливаются и развиваются в процессе длительной и настойчивой работы. Тот, кто последовательно овладевает математикой, кто последовательно получает твердые и точные знания математических фактов, будет уверенно двигаться дальше, и математика станет послушным инструментом в его руках.

Часто мнение о трудности изучения математики связано с туманным и нечетким ее изложением на интуитивном уровне. Кажущаяся трудность тех или иных математических методов нередко обусловлена тем, что эти методы не были своевременно достаточно хорошо разъяснены и потому остались непонятыми. Четкое введение математического понятия по сравнению с введением его на интуитивном уровне, как правило, оправдывает себя при его применении, позволяет его правильно использовать и не нуждается в дополнительных пояснениях. Полезно отдать себе отчет и в том, что развитие правильной математической интуиции у учащегося происходит прежде всего на базе твердых математических знаний, на базе владения математическими методами. Поэтому, само собой разумеется, что если говорить студенту бессмысленные или неверные вещи, что часто делается при попытке обучать математике на интуитивном уровне, то это приведет к выработке у него неправильной интуиции, вредность чего очевидна.

В заключение обсуждения необходимости и полезности строгости в математике приведу единственную цитату, а именно высказывание Д. Гильберта по этому вопросу: «Ошибочно думать, что строгость в доказательстве — враг простоты. Напротив, множеством примеров подтверждается, что строгий метод в то же самое время проще, легче и доступней. Всякое усилие в сторону строгости направляет нас к отысканию простейших методов доказательства» *).

Возвращаясь к вопросу критики методики преподавания математики, следует заметить, что нападки со стороны на якобы неправильную методику преподавания математики нередко связаны с непониманием или нежеланием понять суть дела. Так, например, одно из самых распространенных обвинений в адрес математиков состоит в том, что они обучают студентов никому не нужному эпсилон-дельта языку, в частности, требуют от них знания определения непрерывности функции с помощью эпсилон и дельта, заставляют их проводить на этом языке какие-то искусственные доказательства, скажем, доказывать, используя эпсилон-дельта терминологию, что x^3 является непрерывной функцией, хотя это сразу следует из того, что функция $f(x) = x$ очевидным образом непрерывна, а произведение непрерывных функций также непрерывно. Этот упрек основан на явном недоразумении и нежелании по существу разобраться в вопросе. Ведь определение непрерывности функции на эпсилон-дельта языке просто говорит о том, с какой точностью надо задавать значения аргумента функции для того, чтобы получить значения самой функции с заданной точностью — необходимость понимания этого не вызывает сомнений ни у какого прикладника. Сформулированную выше задачу о непрерывности x^3 , конечно, целесообразнее перефразировать следующим образом: выяснить, с какой степенью точности достаточно задать значение аргумента рассматриваемой функции, чтобы получить ее значение в данной точке с заданной степенью точности. Полезность решения подобных задач очевидна.

*) «Квант», АН СССР и АПН СССР, 1970, № 3, стр. 52.

На этом примере еще раз хорошо видно, что математиков часто обвиняют в грехах, которые им не свойственны. Мне хочется констатировать, что, несмотря на бытующее мнение, математики не схоласты, они прекрасно понимают, что применение математики не сводится к логическим упражнениям, они хорошо отдают себе отчет в необходимости развития интуитивного мышления, но при этом отчетливо понимают, что на первом месте стоит знание. Математики, безусловно, достаточно правильно воспринимают и принимают к сведению разумную критику со стороны. Следует, однако, подчеркнуть, что методика преподавания математики это прежде всего дело самих математиков при условии, конечно, что студенты получают необходимый запас математических знаний. Если же последнее условие не выполняется, то причина этого лежит прежде всего просто в недостаточной квалификации преподавателей математики.

В самом деле, необходимым условием хорошей постановки всякого учебного процесса является прежде всего достаточно высокая квалификация тех, кто учит.

При этом не следует забывать, что вследствие постоянного прогресса науки понятие о высокой квалификации подвергается временному изменению, поэтому надо обращать постоянное внимание на поддержание квалификации преподавателей на надлежащем уровне и принимать своевременные меры по его повышению.

Снижение профессионального уровня и появление дилетантизма среди преподавателей опасны тем, что они лавинообразно приводят к выпуску специалистов, имеющих те же недостатки. Часто забывают и о том, что далеко не всякий хороший в своей области математик (хороший в том смысле, что он достиг успеха в своей научной деятельности) является и хорошим преподавателем (даже в сфере своей узкой специальности). Оставляя в стороне искусство учить, заметим лишь, что большого успеха в математике можно добиться в сравнительно узкой области и с небольшим запасом знаний, а для того, чтобы быть хорошим педагогом, надо быть, в частности, хорошо эрудированным в математике в целом. Впрочем, вопросу общей

эрудиции следует уделять больше внимания при подготовке не только преподавателей, но и научных работников (чтобы они действительно были учеными и зря заново не изобретали велосипед). В свете всего сказанного представляется, что в настоящее время решение вопроса о повышении квалификации преподавателей математики и специальной их подготовки является весьма актуальным и важным.

Так как же все-таки преодолеть перечисленные выше трудности при обучении математике? Как же должна быть построена методика, чтобы преподавание математики было действительно таким, как это было сформулировано в пятом положении?

К сожалению, не существует точных рецептов, как надо преподавать различные разделы математики. Методика преподавания математики не наука, а искусство. Перед разработкой методики и выработкой достаточно обоснованных рекомендаций стоят большие сложности. Ведь подобные рекомендации и принципы, лежащие в их основе, недоказуемы, а основаны на вере. Поэтому, даже если какие-то из них удалось сформулировать, оказывается трудно убедить кого-нибудь в их целесообразности. Большинство, кроме всего прочего, свойственно считать, что так, как они сами учились (у кого-нибудь или самостоятельно), так лучше всего учить и других, (забывая о том, что часто с тех пор, когда они учились сами, прошло 40—50 лет), что то, что понравилось им в свое время или хорошо было освоено, является самым важным и нужным и теперь. Часто то, что преподаватель сам не учил совсем или учил в зрелом возрасте, кажется ему сложным, изысканным и трудным, а потому и ненужным при общем образовании.

Вспоминаю, что один пожилой математик выражал мне удивление по поводу изучения тензоров студентами первого курса, считая, что это для них недоступно. Он ссылался на то, что он и его коллеги математики привыкали к этому понятию всю жизнь. Его убежденность легко объяснима: когда он учился в университете, его в аналитической геометрии обучали только координатному методу, в зрелом возрасте он освоил векторный метод, в солидном столкнулся

с тензорным. Поэтому неудивительно, что последний вызывает у него такое почтительное отношение.

Подобное отношение наблюдается в настоящее время и к теории обобщенных функций.

Как уже говорилось, обучающему обычно кажется, что как нечто понято и усвоено им самим, так оно должно пониматься и усваиваться учащимися, а ведь индивидуальные способности и стили мышления у людей весьма различны. К этому мы вернемся еще ниже при рассмотрении положения восьмого, а пока лишь констатируем, что трудностей в методике преподавания математики более чем достаточно.

Добавим к сказанному, что методика существенно зависит от формы преподавания: методика чтения лекций отличается от методики написания учебника; методика чтения лекций перед аудиторией другая, чем методика чтения лекций по телевидению; зависит методика чтения лекций перед аудиторией и от числа слушателей (большая разница, как читать лекцию, если слушателей пять или двести), и от уровня их подготовки, и от многих других причин.

Плохо, если лекция сводится к более или менее дословному пересказу учебника. Лекции должна быть свойственна большая легкость, большая непринужденность изложения. Материал для лекционного курса должен быть тщательно отобран так, чтобы он содержал все принципиальное и необходимое, несмотря на его меньший, как правило, по сравнению с учебником объем. При действующей в настоящее время системе обучения в высших учебных заведениях для студента обычно бывает достаточно сведений, излагаемых на лекции, т. е. студент может и не читать учебников. В этом нет ничего плохого, так как усвоение хорошо прочитанных лекций является и прекрасным способом подготовки для работы с книгой.

Что касается учебников, то, конечно, на первом месте при оценке их качества стоит их научное содержание, методическая продуманность, ясность и простота языка. Создание хорошего учебника является очень трудным делом. Совсем не просто выбрать нужный уровень общности описания рассматриваемых объектов. Случается, что в погоне за общностью изложение усложняется настолько, что затемняет

основную идею, которую прежде всего должен усвоить читатель. Как правило, при доказательстве какой-либо теоремы для лучшего выделения идеи, лежащей в его основе, целесообразно усилить в разумных пределах предпосылки с тем, чтобы доказательство было по возможности не обременено побочными трудностями (хотя, быть может, и связанными с другими интересными идеями, полезными для каких-то целей, которые, однако, в данном случае не преследуются).

Не надо забывать и о том, что многие вопросы, вызывающие затруднение на одной ступени обучения, делаются простыми и легко понятными на более высокой. Так, например, при изучении интеграла Римана формулу интегрирования по частям целесообразно излагать для гладких или, по крайней мере, для кусочно гладких функций, а не для функций, имеющих интегрируемые по Риману производные, так как последнее без всяких затруднений будет получаться из теории интеграла Лебега.

Важно в учебнике суметь расставить нужные акценты, написать не простое перечисление фактов, а помочь читателю выделить принципиальное, отделить главное от второстепенного, не впадая при этом в многословие. Это сделать сложнее, чем на лекции. Рассказывают, что, когда А. Я. Хинчин доходил в курсе анализа до теоремы о существовании первообразной у непрерывной функции и формулы Ньютона — Лейбница, он всегда начинал изложение этих вопросов в начале двухчасовой лекции и заканчивал его к концу первого часа. После этого он говорил слушателям, что у них сегодня большой праздник — они познакомились с одной из жемчужин математической мысли, с основной теоремой дифференциального и интегрального исчисления, что он хочет, чтобы у них этот день остался в памяти на всю жизнь, что он не может после доказательства этой замечательной теоремы говорить о менее значительных вещах, и потому продолжения лекции не будет, все могут идти домой.

У автора учебника возможности для того, чтобы помочь читателю понять и почувствовать глубину и значительность той или иной теоремы, значительно

меньше, чем у лектора: автор имеет в своем распоряжении лишь несколько фраз.

Очень важен стиль написания. Чрезмерная формализация или, как говорил Дж. Литлвуд, стиль «вдохновленный, несомненно, дьяволом», так же как и его противоположность «описательный» стиль, затрудняют изучение учебника. Изложение в учебнике должно быть кратким, наглядным, логически четким, но не сухим. Учебник должен содержать не только перечисление соответствующих фактов (определений, лемм, теорем, их доказательств, разбор примеров), но и необходимые краткие, и притом точные их разъяснения.

Нецелесообразно, когда читателю учебника приходится размышлять над тем, что думал автор, когда делал переход от одного утверждения к другому. Подобная ситуация случается при наличии пропусков «тривиальных соображений», поэтому лучше не делать подобных сокращений. По словам того же Литлвуда: «две пропущенные тривиальности могут в совокупности образовать непреодолимое препятствие^{*)}». Ссылки на пользу размышления учащихся при обучении, поскольку такое размышление способствует активному усвоению изучаемого материала, здесь не уместны — для таких размышлений имеются упражнения и задачи, текст же учебника должен иметь логически заверченный вид.

Автор учебника должен не просто последовательно излагать факты, а умело вести за собой читателя по увлекательной дороге познания, руководить им, разъяснять ему смысл и значение возникающих понятий и доказываемых теорем, иллюстрировать на примерах применения излагаемых теорий.

К сожалению, иногда пренебрегают и внешним оформлением учебников и тем самым во многом сводят на нет другие их достоинства. Печать в учебнике должна быть четкая, оформление спокойное, текст должен легко читаться; расположение формул должно подсказываться удобством чтения; каждая новая мысль должна начинаться с красной строки; основные

^{*)} Дж. Литлвуд, Математическая смесь, М., 1965, стр. 33.

утверждения должны формулироваться по возможности лаконично (но не в ущерб русскому языку) и сразу бросаться в глаза: увидел и запомнил на всю жизнь.

Все, сказанное при разъяснении седьмого положения, красноречиво говорит о трудностях преподавания математики и о невозможности формулирования здесь точных принципов, которыми следует руководствоваться. В результате нам не удалось далеко уйти от того, что было сказано в начале, т. е. того, что изложение математики должно быть по возможности простым, ясным, естественным и основываться на разумной строгости, не очень вдаваясь в подробности, что это означает.

6. О ТОМ, ЧЕМУ НАДО УЧИТЬ В МАТЕМАТИКЕ

положение шестое. *Учить надо и тому, что нужно, и тому, чему трудно научиться.*

Это положение означает, в частности, что при обучении надо отобрать основные принципиальные вопросы (и это должно быть хорошо отражено в программах), которым и следует обучать в первую очередь, на которых и следует сосредоточивать внимание.

Например, в результате первого знакомства с математическим анализом студент должен научиться обращаться с функциями, заданными формулами, научиться видеть их поведение в точках, на промежутках, должен научиться выделять их главную часть, отбрасывать не существенные в рассматриваемом вопросе добавки, т. е. овладеть формулой Тейлора — все это основа математического анализа. Если студент овладеет этим, то он будет уметь и вычислять пределы, и находить асимптоты, и строить графики, и исследовать сходимости и ее скорость у рядов и интегралов, и вычислять приближенно интегралы, значения функций, суммы рядов и т. д. и т. п. Нередко вместо этого основного метода, вместо основного инструмента исследования функций — формулы Тейлора, в курсе математического анализа изучаются,

и притом частично без доказательств, цепочки теорем, которые студент, заучивая на интуитивном уровне, путает их затем на экзаменах и бывает не в состоянии использовать в своей дальнейшей практической деятельности. К сожалению, это часто связано с тем, что формула Тейлора занимает в учебниках и программах положение бедного родственника. Мне представляется, что здесь, по существу, делается не тот акцент, который следовало бы: основы заменяются надстройкой.

Случается, что в процессе преподавания уделяется незаслуженно много времени хотя и нужным, но простым вещам. Поясним это сначала на не математическом примере. Когда после окончания школы человек поступает на работу, то выясняется, что нередко он не имеет даже представления о том, как написать заявление о приеме на работу и требуемую автобиографию. В связи с этим в печати высказывались предложения о том, что не плохо было бы в средней школе ввести (не помню точно, годовой или полугодовой) предмет «канцеляроведение». Безусловно, то, что оканчивающий школу не знает, как написать заявление и автобиографию, очень плохо, но вводить ради этого предмет канцеляроведения более чем неразумно — этому можно научить между делом: достаточно раза два в год потратить на это несколько минут.

С подобной ситуацией мы часто встречаемся и при преподавании математики. Высказывается, например, категорическое мнение о том, что при вычислении определенного интеграла выражение, содержащее обратные тригонометрические функции и радикалы, не является ответом для инженера, поэтому при решении подобных задач ответ всегда надо доводить до числа, записанного десятичной дробью. В связи с этим высказывается рекомендация обращать особое внимание в процессе преподавания математики на запись в виде десятичных дробей окончательного результата, полученного при решении задачи. Посылка здесь также верна (инженеру нужен ответ в виде десятичной дроби), вывод же вызывает возражение. Пользоваться таблицами учат детей еще в школе. Конечно, возмутительно, если студент высшего техниче-

ского учебного заведения не может по таблице найти значение арктангенса или произвести с помощью логарифмической линейки или миникомпьютера нужные действия, но надо отдавать себе отчет в том, что не этим надо заниматься во втузе, изучая математику. Безусловно, студент должен уметь это делать, а если, паче чаяния, не умеет, то между прочим его надо научить и этому, не делая из этого события и не считая это целью обучения по математике во втузе.

Попутно заметим, что при обучении студента численному решению задач и воспитании у него уважения к численному ответу решения следует значительно шире, чем это делается, использовать численное решение практических задач на смежных кафедрах, особенно таких задач, в которых величина численного значения ответа имеет принципиальное значение для изучения рассматриваемого явления (например, получится дозвуковая скорость или сверхзвуковая).

Новые сложности в вопросе «чему учить» появились в последние десятилетия в связи с бурным развитием быстродействующей вычислительной техники. Для того чтобы уметь правильно ее использовать, а без этого немислима работа большинства современных специалистов (научных работников, конструкторов, инженеров и т. д.), надо хорошо знать не только элементы программирования и уметь обращаться с программами для ЭВМ, как школьник умеет обращаться с тригонометрическими таблицами, не только уметь использовать компьютеры (в том числе и миникомпьютеры), как раньше студент использовал логарифмическую линейку, но и понимать, что значит математически грамотное описание задачи, как надо корректно поставить математическую проблему, как правильно подойти к ее решению, какие существуют методы ее численного решения, какой из них целесообразнее выбрать в данном случае, какие качественные исследования возможно и полезно провести при заданных условиях, не прибегая к помощи компьютеров. Все это в зависимости от рассматриваемой задачи требует более или менее серьезных математических знаний и, значит, соответствующего в определен-

ном смысле серьезного классического математического образования.

На первых этапах обучения общению с вычислительной машиной и ее использованию для решения задач необходимо возникает потребность в знакомстве с элементами теории множеств и математической логики. К сожалению, иногда это принимается за самоцель, а все дальнейшее вышеуказанное математическое образование считается излишним (при этом случается, что изучение элементов математической логики и конечной математики проводится иногда на элементарном наукообразном уровне или, наоборот, принимает излишне гипертрофированные размеры). Подготовка таким методом специалистов является большим злом.

Отдавая себе отчет в том, что отдельный пример не является доказательством, все же приведу один случай, который однажды произошел с Л. А. Люстерником и который он любезно разрешил здесь рассказать.

Несколько лет назад он был приглашен консультантом в один институт, и первая задача, с которой он столкнулся, состояла в табулировании значений одного трехкратного интеграла (если мне не изменяет память) от функции, зависящей еще от нескольких параметров. Были уже составлены программы для вычисления соответствующих таблиц, осуществление счета по которым должно было занять около полугода работы на ЭВМ типа «Стрела».

Л. А. Люстернику показалось, что рассматриваемый интеграл напоминает ему что-то встречавшееся в теории функций Бесселя. Через два-три дня ему действительно удалось, используя аналогии с преобразованиями интегралов в указанной теории, свести злополучный интеграл к однократному, вычисление нужных значений которого на той же «Стреле» потребовало меньше суток! Экономический эффект от использования этого предложения был огромен.

Этот случай является, конечно, красноречивым примером важности математического мастерства и общей математической культуры, примером того, как много может дать правильное использование анали-

тических методов, примером настоящего математического образования.

Следует помнить, что обучение математике, обучение владению математическими методами должно быть направлено на две цели: на обучение определенным алгоритмам и на обучение поиску. Безусловно, что в основу преподавания математики следует положить обучение имеющимся в соответствующей области законченным алгоритмам решения задач, например, методу выделения главной части функции в анализе, методу исключения переменных при решении линейных систем уравнений, тому или иному методу решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, определенным разностным методом численного приближенного решения дифференциальных уравнений и т. д. и т. п.

К сожалению, а может быть, и к счастью, применение математики не сводится полностью к использованию заранее разработанных алгоритмов. Нередко для успешного использования математики при решении новых задач надо проявить определенную долю фантазии, искусства в аналитических преобразованиях, проявить определенную изобретательность, т. е. проявить черты, неотъемлемо входящие в понятие математической культуры. Этому также надо где-то учить, и научить этому, безусловно, гораздо труднее, чем научить использованию готовых алгоритмов.

В связи с этим нельзя не вспомнить неоднократно делающиеся в адрес математиков упреки, что они обучают студентов никому не нужной технике вычисления неопределенных интегралов и интегрированию в конечном виде специально подобранных дифференциальных уравнений, что все это анахронизм, поскольку если им в их дальнейшей практике встретится подобная задача, они просто воспользуются имеющимися справочниками. Я думаю, этот упрек несправедлив.

Здесь будет уместно вспомнить, что хорошо известный экзаменационный минимум, который требовал Л. Д. Ландау от желающих стать его учениками, включал в себя экзамен по математике, в который в обязательном порядке входило вычисление неопределенных интегралов. Вне всякого сомнения,

Л. Д. Ландау отдавал себе полный отчет в том, что в своей работе его ученикам не придется заниматься вычислением интегралов, ибо если это им и потребуется, они скорее всего используют готовые таблицы.

Все дело в том, что где-то студента, изучающего математику, необходимо научить основным элементам аналитических преобразований, умению проявлять в них изобретательность, развить определенное аналитическое чутье, и вычисление несобственных интегралов, а затем решение дифференциальных уравнений в квадратурах дают для этого достаточно простой и вместе с тем достаточно содержательный материал. Неизвестно, чем это можно было бы заменить с тем же эффектом полезности.

Заменить обучение искусству аналитических преобразований обучением пользоваться соответствующими справочниками, безусловно, нецелесообразно — последнее не предмет для обучения, хотя, конечно, в процессе обучения весьма полезно показать, как пользоваться справочной литературой. При этом, однако, не следует забывать, что использование всякого рода справочников предполагает определенный уровень знаний: надо знать, что надо искать, что можно найти и где это можно найти.

Заканчивая разъяснение шестого положения, обратим внимание на существующую большую опасность в тенденции, которая, прикрываясь модернистским лозунгом «классическая математика устарела!», стремится заменить профессиональный уровень обучения математике знакомством с примитивными методами численного решения задач на ЭВМ и попытками математического моделирования сложных задач. Конечно, и это нужно и важно, более того, имеется и такой уровень обучения, где этим можно и ограничиться, но нужно отдавать себе отчет в том, что этого недостаточно там, где требуется серьезное профессиональное использование математических методов.

Стремление заменить углубленное прохождение материала поверхностным знакомством с ним, пренебрежение к преодолению принципиальных трудностей, которые необходимо преодолеть для приобретения

профессиональных знаний, и замена главных путей побочными, не ведущими к той же цели, а приводящими к качественно более низкому уровню обучения, является одной из очень вредных тенденций, возникающих в системе высшего образования.

7. О ТЕОРЕМАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ

положение седьмое. Теоремы существования необходимы для математического образования специалистов в области приложения математики.

Этот тезис имеет значительно более частный характер, чем все остальные, однако представляется необходимым сформулировать его в ряду остальных, так как вопрос о включении в курс математики так называемых «чистых теорем существования» вызывает очень большое число нападков со стороны потребителей математики. В первой главе уже говорилось о том, что это часто происходит от непонимания того, что математическая модель не адекватна конкретному явлению, для описания которого она применена. И поскольку из существования решения реальной задачи (будь она физическая, химическая, социологическая, экономическая, лингвистическая, биологическая или какая-либо еще) не следует существование решения соответствующей математической задачи, то именно поэтому, а вовсе не из любви к логике, доказывают математики в этом случае теоремы существования и математически обосновывают свои заключения.

Доказательство теорем существования служит своеобразной проверкой, математическим экспериментом, дающим оправдание изучению рассматриваемой модели для данного явления. Если удастся доказать теорему существования, единственность решения и корректность самой постановки задачи, то, как правило, создается объективная уверенность в том, что исследования проводятся в правильном направлении. Значение этого трудно переоценить: успех в работе в первую очередь определяется правильным пониманием задачи и правильной ее постановкой. Поясню это на примере еще одного анекдота.

Однажды после долгой разлуки встретились два старых приятеля, и один говорит другому:

— Знаешь, у меня открылся новый талант, я оказался телепатом и могу внушить каждому все, что захочу, и он беспрекословно выполнит мое мысленное приказание.

— Ну да?! — с сомнением сказал его приятель.

— Хочешь докажу? Дай мне любое задание, и сам убедишься, что я могу! — настаивал первый.

— Хорошо, — согласился его знакомый. — Видишь, впереди идет девушка. Внуши ей, чтобы она оглянулась на нас.

— С удовольствием, — ответил тот, напряженно посмотрел вслед девушке, и та действительно оглянулась на приятелей и даже улыбнулась.

— Вот это здорово, — изумился приятель телепата. — А впрочем, — немножко подумав, заметил он, — причем тут твоя телепатия? Шла веселая девушка, ей было скучно, она смотрела по сторонам, посмотрела и на нас.

— Хорошо, — раздраженно сказал телепат. — Вот, видишь, по мосту идет старичок? Хочешь, я внушу ему, чтобы он снял ботинок и бросил его в реку?

— Ну, если ты это сделаешь, я поверю, — был ответ.

Телепат сосредоточился и, о чудо, старик остановился, нагнулся, снял ботинок и, удивляясь на себя, что он делает, бросил ботинок в воду.

— Вот это да! — изумленно протянул приятель телепата. — А впрочем, — задумчиво начал он, — мало ли сумасшедших бродит по городу, может быть, и старичок один из них. А что не придет сумасшедшему в голову! Причем тут твоя телепатия?

— Ах, вот как! — совсем рассердился телепат. — Ты все еще сомневаешься? Сейчас ты убедишься, на что я способен. Смотри, видишь налево многоэтажный дом. Укажи мне любое окно в этом доме, и тому, кто там живет, я прикажу открыть окно и выбросить свой телевизор на улицу.

— Ну, если ты это сделаешь, я, конечно, не буду больше сомневаться, — отозвался его приятель. — Давай выберем на третьем этаже второе окно слева.

Телепат остановился, поднапрягся. Увы, окно не открывалось, никто не пытался выбросить телевизор. Телепат нахмурился, сосредоточился, еще раз напрягся и, о чудо! Кто-то появился в окне, распахнул его и закричал:

— Ну, что ты ко мне привязался! Никакого телевизора у меня нет!

Мы видим, что самый надежный алгоритм оказывается бессильным, если не выполняются условия теоремы существования!

Возвращаясь от шутки к рассмотрению вопроса по существу, заметим, что с помощью теорем существования, доказательства которых имеют неэффективный характер, иногда удается получать решения задач в виде тех или иных математических формул, удобных для получения приближенных решений посредством прямых вычислений, проводимых по этим формулам.

Рассмотрим, например, задачу о вычислении корня из положительного числа. Пусть задано число $a > 0$. Зафиксируем произвольным образом число $x_0 > 0$ и для $n = 1, 2, 3, \dots$ положим

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right). \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$, монотонная, именно строго убывающая, а поскольку она ограничена снизу

$$x_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

то согласно теореме Вейерштрасса о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности, последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел. Обозначим его через x . Переходя к пределу в равенстве (1), получим

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

Отсюда

$$x^2 = a,$$

а так как в силу (2) $x \geq 0$, то

$$x = \sqrt{a}.$$

Теорема Вейерштрасса является чистой теоремой существования. Известные методы ее доказательства не дают способа приближенного нахождения пределов ограниченных монотонных последовательностей. Более того, в конструктивном анализе доказывается, что существуют монотонные последовательности, для которых заведомо не существует алгоритма, с помощью которого можно было бы найти их предел с любой наперед заданной точностью (такие последовательности в конструктивной математике не являются сходящимися).

Таким образом, применяя теорему о существовании предела у ограниченной монотонной последовательности, удастся получить рекуррентную формулу (1) для приближенного вычисления корней. Эта формула очень удобна для применения на практике: она имеет простой вид, и получающиеся по ней последовательные приближения x_n значений квадратного корня из числа a весьма быстро стремятся к самому значению квадратного корня из a .

Следует, однако, напомнить, что часто случается, что мы не умеем доказывать теоремы существования для изучаемых нами задач, но тем не менее нам удается находить их численные приближенные решения, строя для этого те или иные численные алгоритмы, часто даже не умея доказывать их сходимость, не говоря уже о получении оценки погрешности. Так действительно бывает, но не следует это возводить в правило; это, как мы говорили выше, просто вынужденная необходимость, а не необходимая закономерность. Существует немало и других ситуаций, где из попыток численного решения рассматриваемых задач ничего не получается. В таких случаях качественные исследования вопросов существования и единственности решения, корректности постановки задачи могут оказать существенную помощь и иметь решающее значение для успеха проводимого исследования.

Вернемся теперь снова к более общим вопросам преподавания математики.

8. О ДЕДУКЦИИ И ИНДУКЦИИ

положение восьмое. *На первых этапах обучения надо отдавать предпочтение индуктивному методу, постепенно подготавливая и используя дедуктивный подход.*

Вопрос индуктивного и дедуктивного метода изложения материала по математике, безусловно, заслуживает отдельного рассмотрения, поскольку он связан с основами, на которых базируется преподавание любого предмета. Имеется много приверженцев как одного, так и другого метода. К сожалению, многие, отстаивая свою точку зрения, исходят только из удобства построения курса, не принимая во внимание педагогического аспекта этого вопроса, в частности, не задумываясь об облегчении усвоения этого курса студентами. В последние годы наблюдается стремление заменять по возможности индуктивный подход дедуктивным, целесообразность этого часто представляется сомнительной.

Выбор правильного пути ознакомления учащихся с новыми для них вопросами (например, выбор индуктивного или дедуктивного метода изложения), т. е. такого пути, чтобы учащиеся по возможности быстро, хорошо и активно овладели предметом, усугубляется большими трудностями в выработке единого метода преподавания в связи с разными индивидуальными способностями и индивидуальными особенностями восприятия и мышления учащихся. Это, конечно, общая проблема, возникающая в процессе обучения по любой дисциплине.

Специфика, относящаяся к обучению математике, состоит в том, что одни лучше воспринимают понятия в рафинированном виде, при кратком их описании, другие при обстоятельном всестороннем их описании, одним свойствен подход снизу от частного к общему (индуктивный), другим подход сверху от общего к частному (дедуктивный), одним конструктивный, другим аксиоматический подход, одним логически обоснованный, другим интуитивный, одним аналитический, другим геометрический и т. д. и т. п. Существенно различна и скорость усвоения информации у различных людей. Более того, именно этим качест-

вом они в основном отличаются друг от друга как учащиеся.

Безусловно, все это невозможно учесть, и невозможно создать такой курс лекций или написать такой учебник, чтобы для каждого учащегося они имели оптимальный характер с точки зрения усвоения им изложенного там материала. Однако забывать об этих важнейших обстоятельствах при организации учебного процесса ни в коем случае нельзя. Особенно следует отметить, что семинарские занятия, где преподаватель имеет дело с сравнительно небольшой группой студентов, дают большую возможность организовать обучение с учетом индивидуальных особенностей студентов.

Несмотря на указанную сложность ситуации, можно попытаться все же высказать некоторые общие принципы, которых целесообразно придерживаться при выборе метода изложения материала. Прежде всего надо стремиться к тому, чтобы основные понятия стали для учащегося естественными. Для этого они должны, как правило, появляться в уже знакомой учащемуся обстановке, не отягощенной дополнительными понятиями, на самом деле не существенными для объяснения основного понятия, а лишь дающими возможность провести изложение в более общем случае.

Например, математический анализ можно сразу излагать в метрических пространствах, причем получится большой выигрыш во времени и курс будет логически весьма стройным. Однако так большей частью не делается, поскольку к восприятию такого курса слушатель должен быть достаточно хорошо подготовлен. Вряд ли целесообразно излагать теорию пределов в метрических (или даже топологических) пространствах, когда слушатель не владеет другими примерами метрических пространств, кроме трехмерного. Формальное определение других метрических пространств, например, функциональных, не спасает дело, так как к этим пространствам надо привыкнуть, они должны стать естественными, надо почувствовать целесообразность и пользу от их введения, что при отсутствии знаний, по-видимому, невозможно.

Не следует забывать и о том, что без понятия равномерной сходимости и определенного интеграла невозможно ввести важнейшие функциональные пространства. Поэтому изучение основ анализа сразу в метрических пространствах не принесет ожидаемой пользы. До понятия метрического пространства, как и до любой математической абстракции, надо естественным образом дорасти. Функция сама по себе достаточно содержательное понятие, и прежде чем превращать ее в точку функционального пространства, полезно как следует познакомиться с ее свойствами. Так, предел функции одного переменного является очень важным и нужным понятием, рассмотрение его сразу, как частного случая, например, фильтра, может неоправданно затруднить учащемуся усвоение понятия предела. В то же самое время появление понятия фильтра после пределов функций и интегральных сумм совершенно естественно и закономерно.

Можно сразу ввести и понятие интеграла Лебега конструктивно, на основании теории измеримых функций или как замыкание по соответствующей норме линейного функционала над ступенчатыми функциями, равного площади соответствующей ступенчатой фигуры. Однако вряд ли целесообразно так поступать, обходя понятие интеграла Римана на отрезке, где идея интеграла столь прозрачна и ясна.

Когда излагаются понятия, обобщающие уже известные, следует обязательно отметить это обстоятельство. Говоря о производных Фреше или Гато, надо показать их связь с обычной производной. Доказывая теоремы по линейной алгебре в многомерных пространствах, очень полезно показать, что следует из них для плоскости и трехмерного пространства. Ведь нередко случается, что студент, доказав ту или иную общую теорему, не в состоянии применить ее в простейшем конкретном случае.

Индуктивные методы изложения материала, при которых происходит последовательное обобщение понятий, представляются более благоприятствующими активному усвоению материала учащимися. Именно в этом смысле и понимается предпочтение индуктивного метода перед дедуктивным. Что же касается затраченного времени, то если его считать не по числу

лекционных часов, а по числу часов, затраченных учащимися на усвоение материала, то вряд ли оно окажется большим, чем при преподавании, основанном на дедуктивном методе. К сожалению, встречаются преподаватели математики, которые любят увлекаться формализмом, абстракциями, излагая при этом материал как нечто данное свыше, непонятно как придуманное кем-то. Это обычно дает большую экономию во времени при изложении материала, однако, как правило, совершенно неоправданно с точки зрения его активного усвоения.

Характер объектов, которые рассматриваются как конкретные или абстрактные, зависит от обстоятельств, обусловленных прежде всего уровнем математического образования учащихся.

Например, для студента, встречавшегося с уравнениями в частных производных только в курсе гидродинамики, изучение различных краевых задач для уравнения Лапласа и общих свойств гармонических функций будет шагом от конкретного к абстрактному. Для человека, изучающего общую теорию дифференциальных или, тем более, псевдодифференциальных операторов, уравнение Лапласа будет конкретным примером. Аналогично, в теории операторов в банаховых пространствах дифференциальные операторы в свою очередь являются лишь конкретными примерами. Однако на любом уровне при изложении новых понятий, новых общих теорий необходимо и целесообразно потратить достаточно много времени на их конкретные иллюстрации, на разбор примеров, анализ частных ситуаций. При выполнении этих условий может оправдать себя и дедуктивный метод изложения.

Как всегда, надо помнить, что всякое утверждение о методике, высказанное в категорической форме, легко довести до абсурда. Это относится и к положению о предпочтительности индуктивного метода перед дедуктивным. Иногда эту предпочтительность понимают в том смысле, что считают необходимым, прежде чем ввести какое-либо математическое понятие, подготовить естественность его введения с помощью повторения исторического пути возникновения и развития этого понятия. Большей частью это, конечно, не оправданно, и приводит к бесполезной трате вре-

мени. Современный студент психологически и по своему образованию достаточно хорошо подготовлен к непосредственному восприятию математических понятий без анализа тех обстоятельств, которые привели к их появлению. Само собой разумеется, что сами по себе исторические экскурсы весьма полезны и с общеобразовательной и с гносеологической точки зрения, не говоря уже о том, что, оживляя изложение, они способствуют лучшему усвоению материала.

9. О РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

положение девятое. Обучение решению прикладных задач математическими методами не является задачей математических курсов, а задачей курсов по специальности.

Это положение касается одного из тех вопросов, по которому особенно часто критикуются как математические курсы в высших технических учебных заведениях, так и учебники по математике для них. Безусловно, что простейшие конкретные примеры, иллюстрирующие применение математических понятий для изучения реальных явлений, как-то: иллюстрация понятия производной скоростью движения материальной точки или линейной плотностью стержня, интеграла — работой силы, составления дифференциальных уравнений — выводом уравнения радиоактивного распада и т. п., весьма полезны. Более того, было бы ошибкой понимать девятое положение как рекомендацию нецелесообразности обучения студентов решению прикладных задач математиками. Это всегда делалось и будет делаться, потому что это нужно и полезно.

Дело не в этом, а в том, что систематическое обучение студентов применению математических методов, изучаемых ими в курсе математики, к решению прикладных задач обязательно должно осуществляться на профилирующих кафедрах высшего технического или другого специального (не математического) учебного заведения. Это должно являться непреложной обязанностью этих кафедр. Только в этом случае у учащегося может создаться убежденность в полез-

ности и необходимости знания и использования математических методов в его профессии.

Если на профилирующих кафедрах это не делается, то, возможно, это признак того, что для данной специальности вовсе и не нужна математика в том объеме, в котором она изучается в данном институте, а может быть, и признак неблагополучной постановки изучения в нем специальных дисциплин. Во всяком случае, существенно бо́льшая польза от изучения математики будет в том случае, когда в процессе всего обучения в институте она будет достаточно широко использоваться при изложении специальных дисциплин. Это, увы, далеко не всегда так.

К математическим курсам нередко предъявляются претензии, что в них в недостаточном количестве выводятся дифференциальные уравнения, описывающие реальные явления. Этого рода критика нередко связана с присущей многим людям манерой, не делая того, что они сами обязаны делать, убежденно говорить, что это должны делать другие, и критиковать их за то, что они делают это плохо. Мне представляется, в этом вопросе следует четко отдать себе отчет в том, что математическое моделирование реальных явлений, т. е. составление математической модели такого явления,— это не задача математики.

Задача математики, как это отмечалось выше, состоит в изучении математической модели, ее свойств и особенностей. Большое удивление должно вызывать не то, что в математических курсах не строятся все математические модели, не выводятся все дифференциальные уравнения, необходимые для данной специальности, а то, что это не делается в специальных курсах. Так, например, трудно найти общий физический курс (конечно, здесь не имеется в виду теоретическая физика), в котором бы выводилось уравнение Лапласа или уравнение теплопроводности для описания какого-либо явления. Еще труднее найти в этих курсах анализ различных граничных условий рассматриваемых в них уравнений (предполагается, по-видимому, что все это должны делать математики, однако, даже при их желании, они лишены возмож-

ности это сделать в рамках времени, отводимого на математические курсы).

К упрекам рассматриваемого здесь типа в адрес математических курсов следует отнести еще упрек, состоящий в том, что после изучения курса математики студенты не знают обычно нужного физического смысла какого-то члена в каком-то уравнении. Мне представляются подобные упреки к общему курсу математики несправедливыми. Выяснение конкретного физического смысла члена уравнения это также дело специальных дисциплин, и не следует его перекладывать на плечи математиков (подчеркнем еще раз, что речь идет об общем курсе математики, а не о специальных курсах, направленных на конкретную цель, обусловленную будущей профессией студента). Поскольку математика изучает математические модели, то ее задачей при изучении уравнений могут являться вопросы, например, следующего вида: как влияет изменение данного члена уравнения на существование решения, его единственность, его асимптотическое поведение, на корректность постановки задачи, на устойчивость решения и т. д. и т. п. Научить подобным вещам, кстати, совсем не просто, а когда студент этим овладеет, он легко усвоит и конкретные факты, нужные ему по его специальности, которые должны быть изложены в специальных курсах.

Безусловно, что обучение умению составлять математические модели реальных явлений является одной из первоочередных задач в процессе образования специалистов рассматриваемых нами профилей, и потому этому должно уделяться гораздо больше времени и внимания, чем это часто делается. Однако было бы неправильно возлагать основную работу в этом направлении на математиков; главную роль здесь должны играть специалисты (физики, химики, биологи, экономисты и т. д.). Не следует, конечно, думать, что математики не должны принимать участие в составлении математических моделей и обучать этому составлению. Совсем наоборот. Это не только желательно, но, по-видимому, и необходимо: хотя математическое моделирование не входит в математику, но оно входит в деятельность математиков. Поэтому обу-

чение ему студентов должно проводиться совместно специалистами в соответствующих областях и математиками, но делаться это должно в специальных курсах на высоком профессиональном уровне, с полным пониманием существа дела.

Правда, в настоящее время подготовка специалистов по математическому моделированию находится в руках математиков. Это, по-видимому, неизбежно, поскольку достаточно квалифицированно этот вопрос может быть решен лишь на основе хорошего математического образования. Однако, возможно, недалек тот день, когда нужную математическую подготовку будут иметь также студенты физических, биологических, технических, медицинских, экономических и других специальностей, что позволит осуществлять подготовку нужных специалистов по математическому моделированию в соответствующих специальных высших учебных заведениях. При этом следует еще раз подчеркнуть, что обучение математическому моделированию должно входить как часть в специальное образование, а не проводиться за счет общего математического образования. Изучение математики нельзя подменять обучением составлению математических моделей. В математических курсах математическое моделирование может носить лишь иллюстративный характер.

Особенно на вопросы математического моделирования следует обратить внимание в тех областях, в которых в настоящее время лишь создаются основные математические модели для изучаемых объектов. Сюда следует отнести, например, экономику, биологию, медицину, планирование, управление, социологию, лингвистику. Математическое моделирование заслуживает особенного внимания, поскольку оно играет все большую роль во многих областях современной науки и техники, являясь мощным и экономически выгодным средством как для проведения научных исследований, так и для выполнения самых разнообразных экспериментальных и конструкторских работ. Например, использование математических моделей при проектировании самолетов и кораблей и расчет их на ЭВМ экономически во много

раз более выгоднее создания экспериментальных образцов.

Таким образом, математическое моделирование в сочетании с современной вычислительной техникой дает в руки ученых качественно новые методы исследования, качественно новые методы управления процессами как естественными, так и порожденными деятельностью человека. Его широкое использование, по существу, необходимо для успешного развития наук. Оно составляет неотъемлемую часть процесса накопления знаний человеческим обществом и приводит к необходимости подготовки специалистов нового типа, владеющих не только своей специальностью, но и математикой, знающих методы математического моделирования и умеющих их творчески использовать. Поэтому в наши дни должно быть затрачено специальное усилие на подготовку специалистов, способных квалифицированно решать задачи математического моделирования.

Вопрос о подготовке таких специалистов делается сейчас одним из самых важных и актуальных вопросов современного образования. Правильная организация обучения составления математических моделей возможна лишь при хорошей координации усилий в этом направлении математиков и специалистов в соответствующих областях.

10. О ВЫБОРЕ СОДЕРЖАНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ

положение десятое. Каким разделам математики и в каком объеме надо учить студентов данной специальности — должны определять специалисты в этой области, а как этому учить, это дело профессионалов-математиков.

По этому тезису очень трудно дискутировать, потому что, как это уже дважды отмечалось, что-что, а уж как учить, каждый считает, что знает лучше других, и переубедить его в чем-либо практически невозможно, особенно, пожалуй, в том случае, когда он не является математиком, а лишь потребителем математики.

Наиболее разумным представляется положение (которое фактически и осуществляется, как правило,

в высших учебных заведениях, однако периодически вызывает резкую критику со стороны специальных кафедр), когда объем математических знаний, степень владения ими и характер приобретаемых студентами навыков определяется ведущими специалистами в области будущей специализации студентов. Время, отводимое на изучение этого материала, должно, естественно, определяться совместно специалистами в указанной области и математиками, причем следует принимать во внимание добавление всех необходимых для внутренней связи звеньев, присущих математике, как и всякой другой науке, о которых говорилось выше. Планирование, разработка методики преподавания и осуществление самого процесса обучения студентов математике должно проводиться всецело самими математиками. В действительности дело обычно не идет так гладко и периодически осложняется конфликтами между математическими и специальными кафедрами.

Иногда в этих конфликтах бывают виноваты сами преподаватели математики. Случается, что они из-за какого-то снобизма не хотят (я думаю, случаев, когда не могут, очень мало, и они не типичны при наличии достаточно квалифицированных кадров. Вопрос же о подготовке кадров преподавателей математики для вузов сам по себе настолько сложен, что здесь мы не будем его касаться, а будем исходить из того, что кадры необходимой квалификации имеются в наличии, хотя на самом деле это далеко не так) прислушаться к пожеланиям к курсу математики, высказываемым специальными кафедрами, и догматически излагают одну теорему за другой, не обращая внимания на необходимость активного творческого овладения студентами излагаемого материала, на развитие у них интуиции в нужном направлении, на создание у них мировоззрения практика, использующего математический аппарат лишь для решения конкретных задач и не интересующегося им как самоцелью. Встречается иногда среди преподавателей математики, воспитанных в духе чистой математики, недооценка и даже пренебрежительное отношение к методам численного решения задач и переоценка общих качественных теорий, нежелание осознать разницу между доказатель-

ством существования решения задачи и отысканием алгоритмического устойчивого метода нахождения приближенного решения, даже несмотря на то, что такие постановки задач являются чисто математическими, очень важными и нередко более трудными и глубокими, чем относящиеся к ним вопросы «чистой» математики.

Следует отметить еще один близкий по духу упрек математикам. Очень часто, объясняя математические понятия, широко используемые в физике (или в какой-либо другой области знания), они не перекидывают мостика, связывающего эти понятия с их традиционными применениями, а это необходимо делать. Подобная ситуация случается, например, с той же дельта-функцией или с теорией скалярных и векторных полей. Так, автору многократно приходилось убеждаться, что после изучения в курсе анализа понятий дивергенции, потока векторного поля и доказательства теоремы Гаусса — Остроградского у студентов вызывал затруднение ответ на вопрос: чему равна дивергенция напряженности поля точечного единичного электрического заряда на некотором расстоянии от него.

Подобная ситуация, конечно, недопустима; справедливости ради, следует сказать, что ответственность за нее несет в равной степени с кафедрой математики и кафедра физики. В результате изучения каких-либо понятий в математике у студента не должно быть затруднений в использовании их в физике.

Недостатки в преподавании математики часто вместо естественного их анализа приводят к активному вмешательству в процесс обучения математики со стороны специальных кафедр и деканатов, что, как правило, отнюдь не содействует улучшению математической подготовки студентов. Известные мне попытки нематематиков взять в свои руки обучение математике не дали положительных результатов, что, конечно, естественно. Безусловно, что никто лучше хорошего профессионала-математика не сможет научить математике, на то он и хороший специалист своего дела. Лишь он, владея всем предметом в целом, может по существу разобраться, что следует доказывать в общем виде, а что в частном, а что и вовсе не доказы-

вать, какие полезней всего рассмотреть примеры и т. д. и т. п.

Для правильной постановки преподавания математики необходимо достичь определенного уровня взаимопонимания между математическими и специальными кафедрами. Там, где этот уровень достаточно высок, а таких примеров довольно много, успех налицо.

* * *

Мы сформулировали десять основных положений, на которых можно строить преподавание математики в высших учебных заведениях. Конечно, возможно было бы исходить и из других положений: в методике нельзя с помощью только одних логических рассуждений установить, что истинно и что ложно. Лишь хорошие результаты обучения студентов, достигнутые в результате использования той или иной методики преподавания, могут служить обоснованием целесообразности ее применения. Следует заметить, что указанные десять принципов лежат, по существу, в основе преподавания математики во многих высших учебных заведениях и дают возможность выпускать специалистов, умеющих достаточно квалифицированно и успешно использовать математический аппарат в своей работе.

Однако успокаиваться на достигнутых успехах, когда наблюдаются невиданные ранее темпы развития наук, в том числе и математики, и особенно, когда эти темпы непрерывно убыстряются, нельзя.

Небывалый рост и прогресс научных исследований, а также увеличение в связи с этим процента научных работников в общей массе людей имеет своим прямым следствием возникновение огромного потока информации или, как говорят, информационного взрыва.

Постоянно увеличивается и объем новой математической информации: решаются разнообразные задачи (теоретические, экспериментальные, прикладные), возникают новые понятия, строятся новые

математические модели, развиваются и обобщаются старые теории, создаются новые, изобретаются новые методы исследования, доказываются новые теоремы, выдвигаются гипотезы, и все это находит свое отражение во все возрастающем количестве публикаций научных и методических статей, монографий, учебников (хотя последних по-прежнему во многих случаях остается недостаточно — учебная литература не успевает отражать новейшие достижения современной науки и техники), депонированных рукописей, диссертаций. Растет число научных издательств, вновь и вновь создаются новые математические журналы, расширяются ротопринтные издания, приобретающие все большее и большее значение для быстрого обмена информацией, и т. д. и т. п.

Дело не только в количественном увеличении информации. В ней происходят и большие качественные изменения. Значительная ее часть приобретает узкоспециальные черты, благодаря чему она делается доступной для понимания и правильной оценки лишь ограниченному кругу специалистов в соответствующей области.

В связи с увеличением роста количества информации и вследствие этого с ее обилием, с которым человечество прежде не встречалось, в том числе и с обилием безусловно полезной информации, а также в связи с тем, что она качественно делается иной, возникает важная и актуальная задача систематизации имеющихся информационных сведений.

Наличие такой систематизации может существенно помочь своевременному нахождению полезной информации и умению выделить из нее часть, необходимую для достижения той или иной поставленной цели, в частности для оптимального отбора информации, которая должна быть сообщена студентам и усвоена ими в процессе их обучения в высшем учебном заведении. Это очень сложная задача.

Поэтому сейчас, как никогда, на представителей старшего поколения ученых лежит ответственность за выбор того нужного и принципиально важного материала из всего богатства знаний, накопленного современной наукой, который действительно необхо-

димо передать молодежи, и притом в первую очередь. Здесь особенно важно чувство меры.

В заключение еще раз отметим, что объем информации, которую может усвоить учащийся, не беспределен. Поэтому из каких бы принципов ни исходить при отборе материала, который мы собираемся передать нашим ученикам, какие бы при этом ни ставить перед собой цели, если мы хотим добиться успеха в обучении, то всегда полезно помнить афоризм Козьмы Пруткова *): «Никто не обнимет необъятного!».

*) Сочинения Козьмы Пруткова. Изд-во «Художественная литература», М., 1953.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж., Исследование психологии процесса изобретения в области математики, «Сов. радио», М., 1970.
2. Александров П. С., Мир ученого, «Наука и жизнь», 1974, № 8.
3. Колмогоров А. Н., О профессии математика, «Сов. наука», М., 1954.
4. Крылов А. Н., Воспоминания и очерки, АН СССР, М., 1956.
5. Моисеев Н. Н., Математик задает вопросы... «Знание», М., 1974.
6. Пойя Д., Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, М., 1957.
7. Пойя Д., Математическое открытие, «Наука», М., 1970.
8. Постников А. Г., Культура занятий математикой, «Знание», М., 1975.
9. Реньи А., Диалоги о математике, «Мир», М., 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
Г Л А В А I	
ОБ ОБЩИХ ПРИНЦИПАХ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ	9
1. О специфике преподавания	9
2. О сущности математики	24
Г Л А В А II	
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ.	45
1. О содержании математических курсов	45
2. О единстве математики	48
3. О внутренней логике математики	61
4. О цели обучения математике	62
5. О методических принципах преподавания математики	66
6. О том, чему надо учить в математике	86
7. О теоремах существования	92
8. О дедукции и индукции	96
9. О решении прикладных задач	100
10. О выборе содержания образования и его реализации	104
ЛИТЕРАТУРА	110

ЛЕВ ДМИТРИЕВИЧ КУДРЯВЦЕВ

**Мысли о современной математике
и ее изучении**

М., 1977 г., 112 стр.

Редактор *Т. С. Пиголкина*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректор *И. В. Хорошаева*

Сдано в набор 03.05.1977 г. Подписано к печати 25.10.1977 г. Бумага 84×108^{1/32} тип. № 1. Физ. печ. л. 3,5. Условн. печ. л. 5,88. Уч.-изд. л. 5,6. Тираж 100 000 экз. Т-18539, Цена книги 20 коп. Заказ № 3045.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

Отпечатано во 2-ой типографии издательства «Наука», Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

Цена 20 коп.

